Министерство здравоохранения Республики Беларусь
УО «Витебский государственный медицинский университет»

кафедра медицинской и биологической физики

И.А. Голёнова

ОСНОВЫ МЕДИЦИНСКОЙ СТАТИСТИКИ

С ЭЛЕМЕНТАМИ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Рекомендовано учебно-методическим объединением по медицинскому, фармацевтическому образованию в качестве пособия для студентов учреждений высшего образования, обучающихся по специальности 1-79 01 08 «Фармация»

Витебск – 2017

УДК 61+31(072)
ББК 51.1(4Беи),02я73+22.11я73
Г60

Рекомендовано к изданию Центральным учебно-методическим советом ВГМУ
(протокол №8 от 21 сентября 2016 г.)

Рецензенты:

кафедра теории функций Белорусского государственного университета

Джежора А.А. – заведующий кафедрой математики и информационных технологий УО «Витебский государственный технологический университет», доктор технических наук, доцент;

Голёнова И.А.

Г60 Основы медицинской статистики с элементами высшей математики: пособие / И.А. Голёнова.– Витебск: ВГМУ, 2017. – 362 с.

ISBN 978-958-466-855-0

Пособие подготовлено в соответствии с типовой учебной программой по основам медицинской статистики для студентов фармацевтических факультетов. В нем изложены основные вопросы высшей математики, теории вероятностей и статистики, необходимые для решения прикладных задач физики, химии, фармации, биологии и медицины. Приводятся вопросы и задачи для самоконтроля. Пособие предназначено для студентов первого курса фармацевтического факультета, может быть полезно преподавателям и студентам лечебного и стоматологического факультетов.

УДК 61+31(072)
ББК 51.1(4Беи),02я73+22.11я73

ISBN 978-958-466-855-0

СОДЕРЖАНИЕ

Глава III
Дифференциальные уравнения

ЧАСТЬ II
ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Глава IV
Событие и вероятность

Глава V
Дискретные и непрерывные случайные величины

ЧАСТЬ III
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Глава VI
Выборочный метод

Глава VII
Элементы теории ошибок (погрешностей)

Глава VIII
Проверка статистических гипотез

Глава IX
Элементы теории корреляции

Глава X
Основы дисперсионного анализа

Глава XI
Анализ временны́х рядов

ЧАСТЬ IV
МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ И УПРАВЛЕНИЯ В ФАРМАЦИИ

Глава XII
Линейное программирование

ПРЕДИСЛОВИЕ

Целью математической подготовки студентов фармацевтических факультетов медицинских университетов является ознакомление их с основными понятиями и методами современного математического аппарата как средства решения задач физического, химического, биологического и иного характера, встречающихся как в процессе изучения профильных дисциплин, так и в дальнейшей профессиональной деятельности.

Содержание данного пособия соответствует типовой учебной программе по основам медицинской статистики для студентов фармацевтических факультетов медицинских университетов, утвержденной МО РБ в 2014 г.

Пособие состоит из четырех частей: «Элементы математического анализа и дифференциальных уравнений», «Элементы теории вероятностей», «Математическая статистика», «Методы оптимизации и управления в фармации». Наряду с классическими разделами подробно представлены такие новые и весьма актуальные разделы, как непараметрические критерии, временные ряды и др. В пособии описаны этапы планирования медицинского исследования, проверки статистических гипотез, а также основные методики и алгоритмы математической статистики, применяемые в научных исследованиях, практическом здравоохранении и фармации.

Каждая глава включает теоретический материал, подробно разобранные примеры решения задач, вопросы для самоконтроля и задания для самостоятельного решения. В конце учебного пособия приведен глоссарий основных математических терминов, список литературы и приложения, содержащие некоторые справочные формулы и таблицы.

В отличие от аналогичных изданий по статистике, в данном пособии, при изложении теоретической части материала, основной акцент сделан не на строгих математических доказательствах соответствующих теорем, а на их смысле и возможностях практического применения в медицине и фармации, что имеет особое значение для студентов медицинских специальностей. В связи с профессиональной направленностью обучения, помимо элементов высшей математики, теории вероятностей и статистики, во всех главах приведены примеры и задачи из области физики, химии, биологии, медицины и фармации.

Материалы учебного пособия могут быть также использованы студентами лечебного и стоматологического факультетов при изучении отдельных тем курса «Медицинская и биологическая физика», студентами фармацевтического факультета заочной формы обучения, аспирантами и магистрантами при выполнении исследования.

ЧАСТЬ I
ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

ГЛАВА I
ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

§ 1.1. Функциональная связь. Предел функции

Функцией или **отображением** множества X в множество Y называют правило, по которому каждому элементу $x \in X$ ставится в соответствие определенный элемент $y \in Y$. При этом используется запись $y = f(x)$. Переменная x называется **независимой переменной** или **аргументом**, а переменная y называется **зависимой переменной** (от x) или **функцией**.

Множество X называют **областью определения функции** и обозначают $D(f)$, а множество Y – **областью значений функции** и обозначают $E(f)$.

Способы задания функции

1. Аналитический способ – это задание функции с помощью формул. Например,

$$y = x^2,\ y = \sin x \qquad \text{или} \qquad y = \begin{cases} x, \text{ если } x \le 0 \\ x^2, \text{ если } x > 0 \end{cases}.$$

2. Табличный способ – это задание функции с помощью таблицы. Табличный способ задания функции широко используется в экспериментальных исследованиях и наблюдениях. Например, измеряя температуру тела больного через определенные промежутки времени, можно составить таблицу значений температуры тела t как функции времени τ:

t, ч	1	3	5	7	9
τ, °C	37,0	37,3	37,8	38,2	38,4

Недостатком табличного способа является то, что функция задается не для всех значений аргумента.

3. Графический способ – это задание функции в виде графика. **Графиком функции** $y = f(x)$ называется изображение на координатной плоскости множества пар (x, y) (рис. 1.1).

Многие приборы, применяемые в медицине и фармации, записывают непосредственно на бумаге или на экране электронно-лучевой трубки результат исследования в виде графика. Так, с помощью электрокардиографа на пленке фиксируется величина возникающих при сокращении сердечной мышцы биопотенциалов U как функция времени t. Преимуществом геометрического способа задания функции по сравнению с аналитическим и табличным является его наглядность.

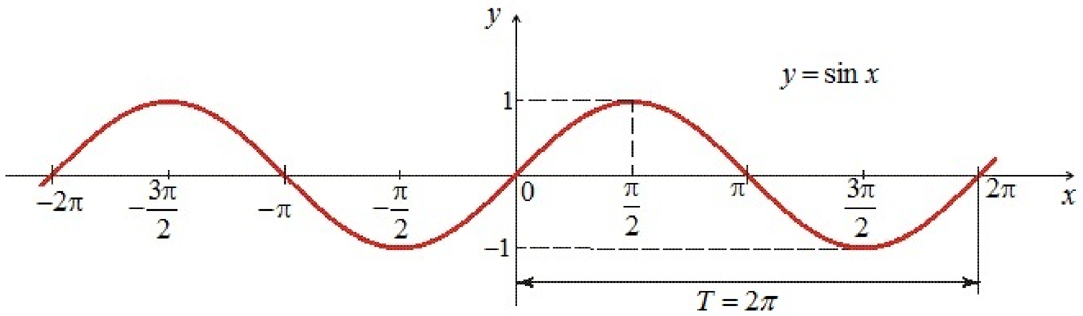


Рис.1.1

Если для любых значений аргументов $x_1, x_2 \in D(f)$ из неравенства $x_1 < x_2$ вытекает неравенство $f(x_1) < f(x_2)$, то функция называется **возрастающей** на множестве $D(f)$.

Если для любых значений аргументов $x_1, x_2 \in D(f)$ из неравенства $x_1 < x_2$ вытекает неравенство $f(x_1) \le f(x_2)$, то функция называется **неубывающей** на множестве $D(f)$.

Если для любых значений аргументов $x_1, x_2 \in D(f)$ из неравенства $x_1 < x_2$ вытекает неравенство $f(x_1) > f(x_2)$, то функция называется **убывающей** на множестве $D(f)$.

Если для любых значений аргументов $x_1, x_2 \in D(f)$ из неравенства $x_1 < x_2$ вытекает неравенство $f(x_1) \ge f(x_2)$, то функция называется **невозрастающей** на множестве $D(f)$.

Возрастающие, невозрастающие, убывающие и неубывающие функции на множестве $D(f)$ называются **монотонными** на этом множестве, а возрастающие и убывающие – **строго монотонными**. Интервалы, в которых функция монотонна, называются **интервалами монотонности**.

Предел функции

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, за исключением, быть может, самой точки x_0. Число A называют

пределом функции $f(x)$ **в точке** x_0, если для любого положительного ε, как бы мало оно не было, найдется такое положительное число δ, что для любого $x \neq x_0$, удовлетворяющего неравенству $|x - x_0| < \delta$, выполняется соотношение $|f(x) - A| < \varepsilon$.

То, что функция $f(x)$ в точке x_0 имеет предел, равный A, обозначают следующим образом:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A.$$

Геометрически существование предела означает, что для любой ε-окрестности точки A найдется такая δ-окрестность точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой δ-окрестности соответствующие точки графика $f(x)$ лежат внутри полосы шириной 2ε, ограниченной прямыми $y = A - \varepsilon$ и $y = A + \varepsilon$ (рис. 1.2).

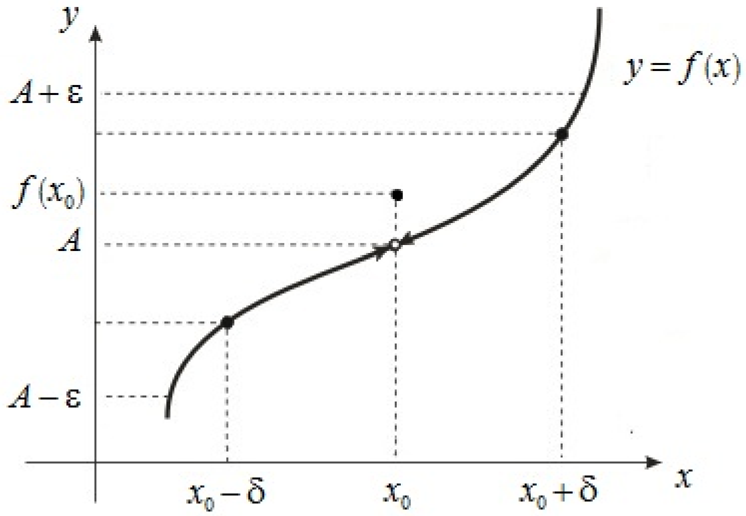


Рис.1.2

Замечание. На рис. 1.2 функция $y = f(x)$ в точке $x = x_0$ имеет предел, равный A, но значение функции $f(x_0) \neq A$, т.е. функция $y = f(x)$ разрывна в точке x_0.

Таким образом, понятие предела функции дает возможность ответить на вопрос, к чему стремятся значения функции, когда, когда значения аргумента приближаются к x_0.

Непрерывность функции

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, определенную в интервале (a,b). Пусть x_0 и x – два произвольных значения независимой переменной из области определения функции. Тогда $x - x_0 = \Delta x$ называется **приращением независимой переменной** (или **приращением аргумента**), следовательно $x - x_0 = \Delta x$. **Приращением** Δy **функции** $y = f(x)$, соответствующим приращению Δx аргумента x в точке x_0, называется разность

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Функция $y = f(x)$ называется **непрерывной в точке** x_0, если бесконечно малому приращению Δx аргумента x в точке x_0 соответствует бесконечно малое приращение функции Δy, т.е.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0.$$

Другими словами, функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, т.е. предел функции в точке x_0 равен значению функции в этой точке.

§ 1.2. Понятие производной функции. Механический и геометрический смысл производной

Задачи, приводящие к понятию производной

Задача о скорости движущейся точки. Пусть материальная точка *M* движется вдоль некоторой прямой. Уравнение $S = S(t)$ выражает путь *S*, пройденный точкой, как функцию времени t. Это равенство называют законом прямолинейного движения материальной точки. Требуется найти скорость движения точки.

Если в некоторый момент времени t точка занимает положение *M*, то в момент времени $t + \Delta t$ (Δt – приращение времени) точка займет положение *N*, где $ON = S(t) + \Delta S(t)$ ($\Delta S(t)$ – приращение расстояния) (рис. 1.3). Таким образом, перемещение точки *M* за время Δt будет $\Delta S(t) = S(t + \Delta t) - S(t)$.

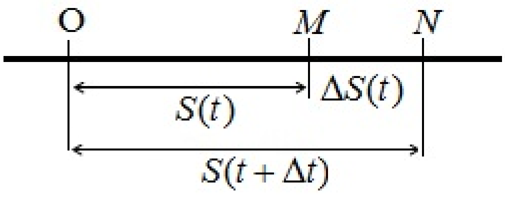


Рис. 1.3

Отношение $\dfrac{\Delta S(t)}{\Delta t}$ выражает среднюю скорость движения точки за время Δt. Чем меньше Δt, тем точнее средняя скорость характеризует скорость движения точки в данный момент времени *t*. Поэтому целесообразно ввести понятие скорости v в данный момент времени *t*, определив ее как предел средней скорости движения при стремлении к нулю промежутка времени Δt:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t}.$$

Величина v называется скоростью движения точки в данный момент времени (или мгновенной скоростью).

Аналогично задаче о скорости прямолинейного движения рассматриваются задачи о скорости химической реакции и скорости роста популяции.

Задача о скорости химической реакции. Обозначим через m количество вещества, образовавшегося при химической реакции за промежуток времени t, т.е. $m = m(t)$. Приращению времени Δt будет соответствовать приращение Δm величины m. Средняя скорость химической реакции за промежуток времени Δt выразится отношением приращения функции к приращению аргумента $\frac{\Delta m}{\Delta t}$. Предел этого отношения при стремлении Δt к нулю, т.е. $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta t}$, есть скорость химической реакции в данный момент времени t.

Задача о скорости роста популяции. Пусть $p = p(t)$ – размер популяции бактерий в момент t. Тогда, рассуждая аналогично предыдущим задачам, получаем, что $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta p}{\Delta t}$ есть скорость роста популяции бактерий в данный момент t.

Приведенные примеры показывают, что мгновенная скорость протекания физических, химических и других процессов находится как предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю. Однако, необходимо заметить, что приращение аргумента может быть и отрицательным, поскольку приращение – это сдвиг на определенную величину, а сдвиг можно производить как в сторону увеличения, так и в сторону уменьшения переменной.

Задача о касательной к данной кривой. Пусть на плоскости xOy задана кривая уравнением $y = f(x)$. Требуется провести касательную к данной кривой в данной точке $M(x_0, f(x_0))$. Так как точка касания M дана, то для решения задачи потребуется найти угловой коэффициент искомой касательной, т. е. $\operatorname{tg}\varphi$ – тангенс угла наклона касательной к положительному направлению оси Ox (рис. 1.4).

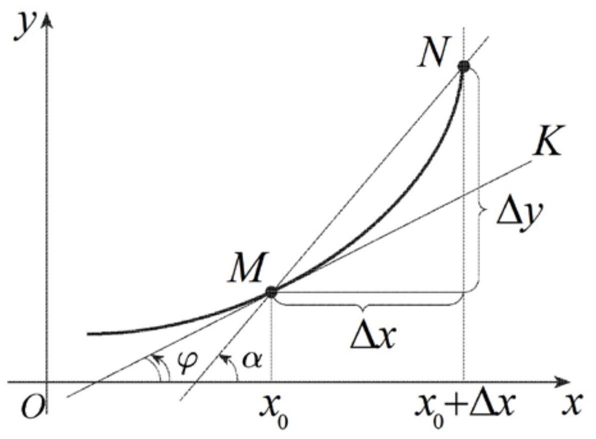


Рис. 1.4

Через точки $M(x_0, f(x_0))$ и $N(x_0+\Delta x, f(x_0+\Delta x))$ проведем секущую MN. Из рисунка 1.4 видно, что угловой коэффициент $\operatorname{tg}\alpha$ секущей MN равен отношению

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

где $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$.

Угловой коэффициент касательной MK к данной кривой в точке M может быть найден на основании следующего определения: касательной к кривой в точке M называется прямая MK, угловой коэффициент которой равен пределу углового коэффициента секущей MN, когда $\Delta x \to 0$. Отсюда следует, что

$$\operatorname{tg}\varphi = \lim_{\Delta x\to 0} \operatorname{tg}\alpha = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Определение производной функции

Математическая операция, требуемая для решения рассмотренных выше задач, одна и та же. Выясним аналитическую сущность этой операции, отвлекаясь от вызвавших ее конкретных вопросов.

Пусть функция $y = f(x)$ определена на некотором множестве X. Возьмем произвольное значение x_0 из множества X. Затем возьмем новое значение аргумента $x_0 + \Delta x$ из этого промежутка, придав первоначальному значению x_0 приращение Δx (положительное или отрицательное). Этому новому значению аргумента соответствует и новое значение функции $y + \Delta y = f(x_0+\Delta x)$, где $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$. Теперь составим отношение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Если существует предел отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ приращения функции Δy к вызвавшему его приращению аргумента Δx, при условии, что Δx стремится к нулю, то этот предел называется **производной функции** $y = f(x)$ в данной точке x_0.

Производная функции обозначается через y' или $f'(x)$ (читается «*игрек штрих*» или «*эф штрих от икс*»):

$$y' = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Для обозначения производной принят также и следующий символ $\frac{dy}{dx}$ (читается «*дэ игрек по дэ икс*»). Эту запись надо рассматривать как цельный символ, а не как частное.

Нахождение производной $f'(x)$ от данной функции $f(x)$ называют **дифференцированием** данной функции, а функцию, у которой существует производная, называют **дифференцируемой**.

Из рассмотренных выше задач, приводящих к понятию производной, следует:

1. Скорость v прямолинейного движения есть производная пути S по времени t: $v = \frac{dS}{dt}$. В этом состоит **механический смысл производной**.

Скорость v химической реакции есть производная количества вещества m по времени t: $v = \frac{dm}{dt}$.

Скорость роста популяции есть производная размера популяции p по времени t: $v = \frac{dp}{dt}$.

Таким образом, производную любой функции называют скоростью изменения этой функции.

2. Угловой коэффициент касательной к кривой $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 есть производная $f'(x_0)$, т.е. $f'(x_0) = \operatorname{tg}\varphi$. В этом состоит **геометрический смысл производной**.

Теорема 1.1. Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой точке x, то она непрерывна в этой точке. Обратное утверждение не верно.

Примером функции непрерывной и не имеющей производной в точке $x = 0$ (т.е. не являющейся дифференцируемой), является функция $y = |x|$. Как видно из графика этой функции (рис. 1.5), в точке $x = 0$ она непрерывна, но не является дифференцируемой, так как в точке $x = 0$

не существует касательной.

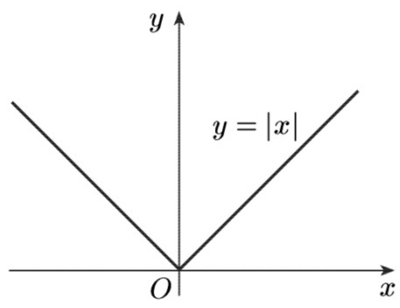


Рис. 1.5

§ 1.3. Основные правила дифференцирования функций

Пользуясь определением производной функции, можно находить производные широкого класса функций. Для этого нужно придерживаться следующей **схемы нахождения производной**:

1) Выбрав некоторое значение аргумента x, дают ему приращение Δx и находят значение функции в точке $x+\Delta x$, равное $f(x+\Delta x)$.

2) Находят приращение функции, вычитая из последующего значения $f(x+\Delta x)$ её первоначальное значение $f(x)$:

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x).$$

3) Делят приращение функции Δy на приращение аргумента Δx:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

4) Находят предел этого отношения:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Найденный предел и есть производная от функции $y = f(x)$.

Замечание. Такой предел может существовать, но может и не существовать.

Пример 1.1. Дана функция $f(x) = x^2 - 3$. Найти производную этой функции.

Решение.

1) Даем аргументу x приращение Δx. Тогда новое, приращенное значение аргумента будет $x+\Delta x$.

Находим приращенное значение функции, подставив в выражение для функции вместо x величину $x+\Delta x$, получим:

$$f(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^2 - 3.$$

2) Находим приращение функции:

$$\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x) = ((x+\Delta x)^2 - 3) - (x^2 - 3).$$

Раскроем все скобки и приведем подобные члены:

$$\Delta f = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - 3 - x^2 + 3 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2.$$

3) Делим приращение функции Δy на приращение аргумента Δx:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$$

4) Находим предел этого отношения при $\Delta x \to 0$, т.е. производную:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}(2x + \Delta x) = 2x.$$

Таким образом, производной для функции $f(x) = x^2 - 3$ является функция $f'(x) = 2x$.

Пример 1.2. Размер популяции бактерий в момент времени t (время выражено в часах) задается формулой $p(t) = 3000 + 100t^2$. Найти скорость роста популяции в момент времени $t = 5$.

Решение.

Скорость роста популяции есть производная размера популяции p по времени t: $v = \dfrac{dp}{dt}$.

1) Зададим аргументу t приращение Δt. Тогда новое, приращенное значение аргумента будет $t + \Delta t$.

Находим приращенное значение функции:

$$p(t+\Delta t) = 3000 + 100(t+\Delta t)^2.$$

2) Находим приращение функции:

$$\Delta p = p(t+\Delta t) - p(t) = 3000 + 100(t+\Delta t)^2 - (3000 + 100t^2).$$

Раскроем все скобки и приведем подобные слагаемые:

$$\Delta p = 3000 + 100t^2 + 200t\Delta t + 100\Delta t^2 - 3000 - 100t^2 = 100(2t + \Delta t)\Delta t.$$

3) Делим приращение функции Δp на приращение аргумента Δt:

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{100(2t+\Delta t)\Delta t}{\Delta t} = 100(2t + \Delta t).$$

4) Находим предел этого отношения при $\Delta t \to 0$, т.е. производную:

$$f'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta p}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} 100(2t+\Delta t) = 100 \lim_{\Delta t \to 0}(2t + \Delta t) = 200t.$$

В частности, при $t = 5$ скорость роста популяции составляет 1000 бактерий в час.

Нахождение производной функции с использованием общего правила дифференцирования весьма трудоемкий и сложный процесс. Поэтому из общего правила дифференцирования выводят ряд формул дифференцирования, полагая, что все рассматриваемые функции имеют производную при заданном значении аргумента.

Производная постоянной величины равна нулю:

$$(C)' = 0, \text{ где } C = \text{const}.$$

Производная суммы. Пусть $u(x)$ и $v(x)$ – две дифференцируемые функции, определённые на одном и том же промежутке. Тогда производная алгебраической суммы этих функций равна алгебраической сумме производных этих функций:

$$(u(x)+v(x))' = u'(x)+v'(x).$$

Методом математической индукции доказывается, что эта формула справедлива для любого конечного числа слагаемых:

$$(u_1+u_2+...+u_k)' = u'_1+u'_2+...+u'_k.$$

Пример 1.3. Вычислить производную функции $f(x) = x+\sin x$

Решение.

$$f'(x) = (x+\sin x)' = (x)' + (\sin x)' = 1+\cos x.$$

Производная произведения двух дифференцируемых функций $u(x)$ и $v(x)$ равна сумме произведений второй функции на производную первой и первой функции на производную второй:

$$(u(x)\cdot v(x))' = u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x).$$

Пример 1.4. Найти производную функции $f(x) = x^2(x+1)$.

Решение.

$$f'(x) = (x^2(x+1))' = (x^2)'(x+1)+x^2(x+1)' = 2x(x+1)+x^2\cdot 1 =$$

$$= 2x^2+2x+x^2 = 3x^2+2x.$$

Эту же производную можно найти другим способом:

$$(x^2(x+1))' = (x^3+x^2)' = (x^3)'+(x^2)' = 3x^2+2x.$$

Производная частного. Если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют в точке x производные и если $v(x)\neq 0$, то в этой точке существует производная их частного, которая вычисляется по формуле:

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{v^2(x)}.$$

Пример 1.5. Найти $f'(x)$, если $f(x) = \dfrac{3+5x}{1-3x}$.

Решение.

$$f'(x)=\left(\frac{3+5x}{1-3x}\right)'=\frac{(3+5x)'(1-3x)-(3+5x)(1-3x)'}{(1-3x)^2}=$$
$$=\frac{5(1-3x)-(3+5x)(-3)}{(1-3x)^2}=\frac{14}{(1+3x)^2}.$$

Производная сложной функции. Функция $y=F(x)$, которая числу x ставит в соответствие число $f(g(x))$, называется функцией от функции или **сложной функцией**, образованной из функций f и g в указанном порядке: $y=f(g(x))$, где $y=f(u)$, $u=g(x)$.

Например, если $y=u^3$, $u=\cos x$, то $y=(\cos x)^3=\cos^3 x$.

Правило дифференцирования сложной функции выражается следующей теоремой:

Теорема 1.2. Если функция $u=g(x)$ имеет производную $u'(x)=g'(x)$ в точке x, а функция $y=f(u)$ – производную $y'_u=f'(u)$ в соответствующей точке u, то сложная функция $y=f(g(x))$ в данной точке x имеет производную:

$$y'_x=f'(u)\cdot u'(x).$$

Примечание. Можно рассуждать по-другому: в формуле $y(x)=f(g(x))$ функция $g(x)$ **– внутренняя функция** или **промежуточный аргумент, функция** $f(g(x))$**– внешняя**. Сначала дифференцируем внешнюю функцию по промежуточному аргументу, а затем – промежуточный аргумент (внутреннюю функцию) по аргументу x, и находим их произведение. По-другому, данная теорема называется «**цепное правило**».

Пример 1.6. Найти производную функции $y=(3-5x+x^2)^{100}$.

Решение.

Пусть $u=g(x)=3-5x+x^2$ – внутренняя функция или промежуточный аргумент, тогда функция $y=(3-5x+x^2)^{100}$ приобретает вид: $y=u^{100}$. Используя теорему о дифференцировании сложной функции, получаем:

$$y'(x)=(u^{100})'_u\cdot u'_x(x)=100u^{99}\cdot u'_x(x)=100(3-5x+x^2)^{99}\cdot(3-5x+x^2)'_x=$$
$$=100(3-5x+x^2)^{99}\cdot(2x-5).$$

Производная обратной функции. Пусть $y=f(x)$ и $x=\varphi(y)$ – взаимно обратные функции. Тогда если функция $y=f(x)$ имеет не равную нулю производную $f'(x)$, то обратная функция имеет производную $\varphi'(y)$ и

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Пример 1.7. Дана функция $f(x) = x + x^2$. Найти производную обратной функции.

Решение.

Производная $f'(x) = (x + x^2)' = 1 + 2x$. Тогда производная обратной функции равна $\varphi'(y) = \frac{1}{1 + 2x}$.

Все функции, которые изучаются в школьном курсе математики, называются **основными элементарными функциями**. К ним относятся: степенная, показательная, логарифмическая, тригонометрическая и обратная тригонометрическая функции.

Таблица основных формул дифференцирования функций

1. $(C)' = 0$
2. $(x)' = 1$
3. $(Cu)' = Cu'$
4. $(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$
5. $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$
6. $(\mathrm{e}^u)' = \mathrm{e}^u \cdot u'$
7. $(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$
8. $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$
9. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$
10. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
11. $(\mathrm{tg}\, u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$
12. $(\mathrm{ctg}\, u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$
13. $(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}$
14. $(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}$
15. $(\mathrm{arctg}\, u)' = \frac{u'}{1 + u^2}$
16. $(\mathrm{arcctg}\, u)' = -\frac{u'}{1 + u^2}$

§ 1.4. Дифференциал функции

С понятием производной тесно связано понятие дифференциала функции. Пусть непрерывная функция $f(x)$ имеет производную в точке

x_0, тогда, согласно определению производной функции $f(x)$ в точке x_0, имеем:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}.$$

Отсюда следует, что для всех достаточно малых Δx справедливо приближенное равенство $\dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} \approx f'(x_0)$. Следовательно, $\Delta f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$. Выражение $f'(x_0)\Delta x$ называется **главной частью приращения функции** или **дифференциалом функции** и обозначается df:

$$df = f'(x_0)\Delta x \approx \Delta f(x_0).$$

Например, если рассматривать функцию $f(x) = x$, то на основании формулы для дифференциала имеем $df = dx = f'(x)\Delta x = x'\Delta x = \Delta x$, следовательно, $df = dx = \Delta x$. Таким образом, **дифференциал функции равен произведению производной этой функции на дифференциал аргумента:**

$$df = f'(x)dx.$$

Примечание. Короткая запись данных рассуждений имеет вид:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} \approx \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} \quad \Rightarrow \quad f'(x_0) \cdot \Delta x \approx \Delta f(x_0);$$

$$f'(x_0)\Delta x = df \quad \Rightarrow \quad df \approx \Delta f(x_0).$$

Пользуясь определением дифференциала $df(x) = f'(x)dx$, получаем **выражение производной функции через дифференциал** (или другую запись определения производной функции):

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

Пример 1.8. Вычислить дифференциал функции $f(x) = (1 + \operatorname{tg} x)^8$.

Решение.

Найдем производную функции $f'(x)$ по правилам дифференцирования сложной функции:

$$f'(x) = 8(1 + \operatorname{tg} x)^7 \cdot (1 + \operatorname{tg} x)' = \frac{8(1 + \operatorname{tg} x)^7}{\cos^2 x}.$$

Тогда $$df(x) = f'(x)dx = \frac{8(1 + \operatorname{tg} x)^7}{\cos^2 x} dx.$$

Применение дифференциала к приближенным вычислениям

Используя выражение $\Delta f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$, можно получить основную формулу для простейших приближенных вычислений. Учитывая, что приращение функции имеет вид $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, получаем:

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x \Rightarrow f(x_0 + \Delta x) \approx f'(x_0)\Delta x + f(x_0).$$

Формула $f(x_0 + \Delta x) \approx f'(x_0)\Delta x + f(x_0)$ **применяется для приближенных вычислений значений функции в точке.** Из нее следует, что приближенное значение функции в некоторой точке $x_0 + \Delta x$ равно произведению производной функции в точке x_0 на приращение аргумента плюс значение функции в точке x_0.

Пример 1.9. Найдем приближенное значение для $\sqrt[3]{26{,}19}$.

Решение.

Полагая $x_0 = 27,\ \Delta x = 27 - 26{,}19 = -0{,}81;\ f(x) = \sqrt[3]{x},\ f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ и

используя формулу для приближенных вычислений

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f'(x_0)\Delta x + f(x_0),$$

получим:

$$f(x_0) = \sqrt[3]{27},\ f'(x_0) = \frac{1}{3\sqrt[3]{27^2}},$$

$$f(x_0 + \Delta x) = \sqrt[3]{27 + (-0{,}81)} = \sqrt[3]{26{,}19} \approx -\frac{0{,}81}{3\sqrt[3]{27}} + \sqrt[3]{27} = -\frac{0{,}81}{3 \cdot 9} + 3 = 2{,}97.$$

§ 1.5. Производные и дифференциалы высших порядков

Производная $y' = f'(x)$ данной дифференцируемой функции $y = f(x)$, называемая **производной первого порядка**, представляет собой некоторую новую функцию. Возможно, что эта функция сама имеет производную. Тогда производная от производной первого порядка называется **производной второго порядка** или **второй производной** и обозначается так: $y'' = (y')'$ или $f''(x)$. Аналогично если существует производная от производной второго порядка, то она называется **производной третьего порядка** или **третьей производной** и обозначается так: $y''' = (y'')'$ или $f'''(x)$ и т. д.

Производная от $(n-1)$ производной (n – натуральное число) называется **производной *n*-ого порядка** или ***n*-ой производной** и обозначается $(y^{(n-1)})' = y^{(n)}$.

Пример 1.9. Найти производную третьего порядка функции $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$.

Решение.

Вычислим производную первого порядка для заданной функции:

$$y' = (2x^3 - 3x^2 + 1)' = 6x^2 - 6x.$$

Найдем производную второго порядка:

$$y'' = (y')' = (6x^2 - 6x)' = 12x - 6.$$

Аналогично вычислим производную третьего порядка:

$$y''' = (y'')' = (12x - 6)' = 12.$$

Дифференциалом *n*-го порядка называется произведение производной n-го порядка на n-ю степень приращения аргумента:

$$d^n y = y^{(n)}(\Delta x)^n = y^{(n)}(dx)^n = y^{(n)}dx^n.$$

Отсюда получается другая запись для n-й производной:

$$y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}.$$

Примечание: Символ dx^n необходимо отличать от символа $d(x^n)$, обозначающего дифференциал функции x^n, т.е. $nx^{n-1}dx$.

Пример 1.10. Найти дифференциал второго порядка от функции $y = \sin^2 x$.

Решение.

Дифференциал второго порядка будет вычисляться по формуле:

$$d^2 y = y'' dx^2.$$

Найдем производную второго порядка для заданной функции:

$$y' = (\sin^2 x)' = 2\sin x \cos x = \sin 2x,$$

$$y'' = (y')' = (\sin 2x) = 2\cos 2x.$$

Тогда $d^2 y = 2\cos 2x\, dx^2$.

Физический смысл второй производной

Пусть $S = S(t)$ – уравнение прямолинейного движения материальной точки. Мгновенная скорость $v(t)$ также как и закон движения, является функцией времени. Поэтому можно рассматривать вторую производную от закона движения как скорость изменения скорости, или вторую производную от функции закона движения: $v'(t) = S''(t) = a$. В физике данная величина называется **ускорением** и, также как и скорость, имеет важное значение для исследования различных процессов.

Таким образом, **физический (или механический) смысл второй производной** заключается в следующем: если задан закон, которому подчиняется движение материальной точки, то **вторая производная**

есть ускорение этого движения.

§ 1.6. Функции нескольких переменных. Частные производные и дифференциалы

Большинство процессов, явлений в окружающем нас мире определяются не одной независимой переменной, а несколькими, функционально связанными между собой. Для изучения подобных зависимостей введено понятие **функции нескольких переменных.**

Например, площадь прямоугольника $S = ab$ есть функция двух независимых переменных сторон a и b. Объем прямоугольного параллелепипеда $V = abc$ является функцией трех независимых переменных – ребер a, b, c параллелепипеда.

Переменная z называется **функцией двух независимых переменных** x и y, если некоторым парам значений x и y по какому-либо правилу или закону ставится в соответствие определенное значение z. Символически функция двух переменных обозначается так: $z = f(x, y)$.

Частные производные первого порядка. Частные производные высших порядков

Для функции двух или нескольких переменных рассматриваются вместо обычных производных – **частные производные**.

Пусть дана некоторая функция двух аргументов $z = f(x, y)$. Если мы дадим приращение только одному аргументу, например x, а второй аргумент y зафиксируем, то можно получить частное приращение функции по этому аргументу:

$$\Delta_x f(x, y) = f(x + \Delta x, y) - f(x, y).$$

Аналогично, разность $\Delta_y f(x, y) = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$ называется частным приращением функции $z = f(x, y)$ по аргументу y.

Частной производной функции двух независимых переменных $z = f(x, y)$ называется производная, взятая по одному из аргументов, а второй аргумент при этом считается постоянным.

Например, частной производной функции $z = f(x, y)$ по аргументу x называется предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$, если он существует, а частной производной по аргументу y называется предел $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta y} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$, если он существует.

Частные производные по аргументам x и y обозначаются следующим образом: z'_x, z'_y, $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Частные производные I-го порядка функции $z = f(x,y)$ также являются функциями аргументов x и y. Частные производные этих функций называются **частными производными второго порядка** искомой функции $z = f(x,y)$. Для этой функции можно определить четыре частные производные 2-го порядка:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right); \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right); \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right); \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right).$$

Частные производные $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ отличаются порядком дифференцирования и называются **смешанными частными производными** второго порядка, а частные производные $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ – **чистыми**.

Частный и полный дифференциалы функции двух переменных

По аналогии с дифференциалом функции одной независимой переменной **частные дифференциалы функции** по x и по y будут соответственно равны:

$$d_x z = \frac{\partial z}{\partial x} dx; \qquad d_y z = \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

Полный дифференциал функции двух независимых переменных будет соответственно равен сумме частных дифференциалов:

$$dz = d_x z + d_y z = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

Полный дифференциал функции двух независимых переменных является главной частью полного приращения и может быть использован для приближенных расчетов полного приращения функции $z = f(x,y)$, т.е. $\Delta f \approx df$

$$\Delta z \approx \Delta f \approx \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

Абсолютная величина полного приращения функции $|\Delta z| \approx |\Delta f|$ при расчете погрешности измерения называется её **абсолютной ошибкой**. Если заменить полное приращение функции дифференциалом, то её абсолютная ошибка рассчитывается по приведенной формуле полного дифференциала.

Пример 1.11. Найти частные производные и полный дифференциал функции:

$$Z = 3x^3y^2 + x^2y^2 + y^4.$$

Решение.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (3x^3y^2 + x^2y^2 + y^4)'_x = 9x^2y^2 + 2xy^2 \quad (y = \text{const});$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (3x^3y^2 + x^2y^2 + y^4)'_y = 6x^3y + 2x^2y + 4y^3 \quad (x = \text{const});$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = (9x^2y^2 + 2xy^2)dx + (6x^3y + 2x^2y + 4y^3)dy.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Какие задачи приводят к понятию производной?
2. Что называется производной функции?
3. Какая математическая операция называется дифференцированием?
4. Что изучает дифференциальное исчисление?
5. Назовите условие непрерывности функции. Сформулируйте соответствующую теорему.
6. В чём заключается механический (физический) смысл производной?
7. Охарактеризуйте геометрический смысл производной. Ответ подкрепите соответствующими формулами и графиком.
8. Как вычисляется производная по её определению?
9. Сформулируйте и запишите основные теоремы о вычислении производной.
10. Какая функция называется сложной?
11. Как вычисляется производная сложной функции?
12. Что называется производными высших порядков? Какой смысл они имеют?
13. Сформулируйте механический (физический) смысл производной второго порядка.
14. Что называется дифференциалом функции?
15. Как дифференциал функции связан с приращением функции?
16. Можно ли применять дифференциал к приближенным вычислениям?
17. Что называется функцией нескольких аргументов?
18. Что называется частной производной функции нескольких переменных?
19. Что называется частной производной второго порядка? Запишите соответствующие формулы.
20. В чем суть смешанной производной второго порядка?

21. Что называется частным дифференциалом функции нескольких переменных?
22. Что называется полным дифференциалом функции?
23. Что такое абсолютная ошибка измерений?

Задания для решения

Найти производные функций, пользуясь непосредственно определением производной:

1. $y = 3x$;
2. $y = 5 - x^2$;
3. $y = (4x+1)^2$;
4. $y = \dfrac{x^3}{3}$.

Вычислить производные функций:

5. $y = x^2 - \dfrac{1}{x}$;
6. $y = \dfrac{x^2}{x^3+1}$;
7. $y = \sin x + \cos x$;
8. $y = a^x \operatorname{arctg} x$;
9. $y = \dfrac{x-1}{\sqrt{x}}$;
10. $y = \dfrac{\ln x}{\operatorname{tg} x}$.

Вычислить производные сложных функций:

11. $y = \sqrt{3x^2+1}$;
12. $y = \operatorname{tg} 2x$;
13. $y = \ln \ln x$;
14. $y = 4\operatorname{ctg}(x/2)$;
15. $y = \sqrt{4-\sqrt{x}}$;
16. $y = \sqrt{1-x^2} \arccos x$.

Вычислить производные второго порядка от функций:

17. $y = 3\sin x$;
18. $y = (ax^2 - b)^2$;
19. $y = x \ln x$;
20. $y = \operatorname{tg} x$;
21. $y = \mathrm{e}^x + \operatorname{arctg} x$;
22. $y = \ln x$.

Вычислить дифференциалы функций:

23. $y = \cos^2 x$;
24. $y = 1 - 3\sin 5x$;
25. $y = x^2 \ln x$;
26. $y = (x^2-1)^2$;
27. $y = \ln\sqrt{\dfrac{1+2x}{1-2x}}$;
28. $y = \operatorname{arctg}(1-x)^2$.

Вычислить частные производные для следующих функций:

29. $z = e^{x^2+y^2}$; 30. $z = x^2 \sin y$;

31. $z = x^y$; 32. $z = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$;

33. $z = (5x^2y - y^3 + 7)^3$; 34. $z = \sin(x^2 + y)$.

Вычислить частные производные второго порядка функции:

35. $z = x^2 + 4y^2$; 36. $z = \dfrac{x-y}{x+y}$;

37. $z = \ln(x - 2y)$; 38. $z = e^{xy}$;

39. $z = \ln\dfrac{y}{x}$; 40. $z = \cos x + 3\sin y^2$.

Вычислить полный дифференциал функций:

41. $z = x^2 + y^2$; 42. $z = y\ln x$;

43. $z = \sqrt{x^3 - y^3}$; 44. $z = \arcsin\dfrac{x}{y}$;

45. $z = \cos(2x + 5y^4)$; 46. $z = e^{8xy}$.

47. Зависимость между количеством x вещества, полученного в некоторой химической реакции, и временем t выражается уравнением $x = A(1 + e^{-kt})$, где A и k – постоянные. Вычислить скорость реакции.

48. Растворение лекарственных веществ из таблеток подчиняется уравнению $c = c_0 e^{-kt}$, где c – количество лекарственного вещества в таблетке, оставшееся к времени растворения, c_0 – исходное количество лекарственного вещества в таблетке; k – постоянная скорости растворения. Вычислить скорость растворения лекарственных веществ из таблеток.

49. Смещение тканей в ответ на одиночное мышечное сокращение (единичный импульс) описывается уравнением $y = te^{-t^2/2}, t > 0$. Вычислить скорость и ускорение в зависимости от времени.

50. Рост числа бактерий подчиняется закону $f(t) = \dfrac{1000e^t}{1 + 0{,}1(e^t - 1)}$. Вычислить скорость роста числа бактерий.

51. Форму комплекса потенциалов, возникающих при возбуждении сетчатки глаза светом (электроретинограмма), можно выразить уравнением $u = r\sin(-3{,}05 \cdot 10^{-3}t^3 + 5{,}6 \cdot 10^{-2}t^2 + 1{,}59 \cdot 10^{-1}t)$, где r – постоянная, t – время. Вычислить скорость изменения потенциала в

начальный момент времени $t = 0$.

52. Для увеличения сокоотдачи при обработке свежего лекарственного растительного сырья используется ультразвук. Общее уравнение сокоотдачи при использовании ультразвука имеет вид $y = A(1 + kt^{0,7}\mathrm{e}^{-0,01425h})$, где A, k – постоянные, t – продолжительность процесса, h – толщина озвучиваемого слоя сырья. Записать уравнения скорости сокоотдачи: 1) для $h = \mathrm{const}$; 2) для $t = \mathrm{const}$.

53. Скорость химической реакции под действием ультразвука определяется формулой $v = A\dfrac{\partial^2 E}{\partial V \partial t}$, где A – постоянная, E – звуковая энергия, поглощенная в объеме V за время t. Записать уравнение скорости v химической реакции для $E = BV\sin^2 \omega t$, где B и ω – постоянные.

54. При лечении некоторых заболеваний одновременно назначаются два препарата. Реакция организма (например, понижение температуры) на дозу x первого препарата и дозу y второго препарата описывается зависимостью $f(x, y) = x^2 y^2 (a - x)(b - y)$, где a, b – постоянные. Определить дозу y второго препарата, которая вызовет максимальную реакцию при фиксированной дозе x первого препарата.

55. Реакция организма на дозу лекарственного препарата спустя t часов после приема описывается зависимостью $f(x,t) = x^2(a - x)t^2\mathrm{e}^{-t}$. При какой дозе x реакция организма окажется максимальной и когда она наступит?

ГЛАВА II
ОПРЕДЕЛЕННЫЙ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛЫ

§ 2.1. Первообразная функции и неопределенный интеграл

Известно, что многие математические операции образуют пары взаимно обратных действий. Например, сложение и вычитание, умножение и деление, логарифмирование и потенцирование. Точно также и для операции дифференцирования существует обратная операция – интегрирование или нахождение функции $F(x)$ по известной ее производной $f(x) = F'(x)$ или дифференциалу $f(x)dx$. Функцию $F(x)$ называют **первообразной** на заданном промежутке для функции $f(x)$, если для всех *x* из этого промежутка $F'(x) = f(x)$ или $dF(x) = f(x)dx$.

Например, функция $F(x) = x^2$ есть первообразная для функции $f(x) = 2x$ на промежутке $(-\infty; +\infty)$, т. к. $F'(x) = (x^2) = 2x = f(x)$ для всех $x \in (-\infty; +\infty)$. Можно заметить, что функция $x^2 + 6$ имеет ту же самую производную $2x$; поэтому $x^2 + 6$ также есть первообразная для $f(x) = 2x$ на всей области определения. Ясно, что вместо «6» можно поставить любую постоянную «*C*». Таким образом, задача нахождения первообразной неоднозначна. Она имеет бесконечное множество решений.

Совокупность всех первообразных $F(x) + C$ для данной функции $f(x)dx$ называют **неопределённым интегралом от функции** $f(x)$ и обозначают $\int f(x)dx$:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

– читается «*неопределенный интеграл эф от икс дэ икс*», где $f(x)dx$ – подынтегральное выражение; $f(x)$ – подынтегральная функция; С – постоянная интегрирования; символ $\int$ – знак неопределенного интеграла. Под знаком неопределенного интеграла мы имеем не производную искомой функции, а ее дифференциал.

Вычисление интеграла от данной функции называется **интегрированием** этой функции.

Свойства неопределённого интеграла

1. Производная от неопределённого интеграла равна подынтегральной функции:

$$\left[\int f(x)dx\right]' = \left[F(x) + C\right]' = F'(x) = f(x).$$

2. Дифференциал от неопределённого интеграла равен подынте-

гральному выражению (дифференциал уничтожает интеграл):

$$d\left[\int f(x)dx\right]=d\left[F(x)+C\right]=\left[F(x)+C\right]'dx=F'(x)dx=f(x)dx.$$

3. Интеграл от дифференциала первообразной равен самой первообразной плюс произвольная постоянная:

$$\int d(F(x)+C)=\int dF(x)=\int F'(x)dx=\int f(x)dx=F(x)+C.$$

4. Постоянный множитель можно выносить за знак неопределённого интеграла:

$$\int k\, f(x)dx=k\int f(x)dx.$$

5. Интеграл от алгебраической суммы равен алгебраической сумме интегралов слагаемых:

$$\int(f_1(x)+f_2(x)-f_3(x))dx=\int f_1(x)dx+\int f_2(x)dx-\int f_3(x)dx.$$

6. Дополнительное свойство: Если $F'(x)=0$ на некотором промежутке, то функция $F(x)$ – постоянна на этом промежутке.

Основные формулы интегрирования

1. $\int dx = x + C$
2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$
3. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1$
4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
5. $\int \mathrm{e}^x dx = \mathrm{e}^x + C$
6. $\int \cos x\, dx = \sin x + C$
7. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$
8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
10. $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C$
11. $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C$
12. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$
13. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$
14. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$
15. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$
16. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\frac{a+x}{a-x} + C$

§ 2.2. Простейшие способы интегрирования: непосредственное интегрирование, интегрирование методом подстановки и по частям

Непосредственное интегрирование

Непосредственное интегрирование – это нахождение интегралов функции, основанное на прямом применении свойств неопределённых интегралов и таблицы основных формул интегрирования.

Пример 2.1. Вычислить неопределенный интеграл методом непосредственного интегрирования $\int (6x^5 + \frac{\sin x}{2} - 10)\, dx$.

Решение.

$$\int (6x^5 + \frac{\sin x}{2} - 10)\, dx = \int 6x^5 dx + \int \frac{\sin x}{2} dx - \int 10\, dx = 6\int x^5 dx + \frac{1}{2}\int \sin x\, dx -$$

$$-10\int dx = 6\frac{x^6}{6} - \frac{1}{2}\cos x - 10x + C = x^6 - \frac{1}{2}\cos x - 10x + C.$$

В подавляющем большинстве случаев мы имеем дело с интегралами функций, которые нельзя найти непосредственным интегрированием. В этом случае можно попытаться сделать подстановку (заменить переменную).

Интегрирование подстановкой (замена переменной)

Способ подстановки заключается в том, чтобы перейти от данной переменной интегрирования к другой переменной с целью упростить подынтегральное выражение и привести его к одному из табличных интегралов. Общих правил для выбора вида новой переменной не существует, задача решается в каждом конкретном случае индивидуально. Однако существует определённая последовательность действий для данного метода.

Пример 2.2. Вычислить следующий интеграл: $\int e^{2x+3} dx$.

Решение.

1. Введём новую переменную t, связанную с x следующей зависимостью:

$$2x + 3 = t.$$

2. Возьмём дифференциал от левой и правой части этого равенства:

$$d(2x+3) = dt,$$

$$(2x+3)' dx = dt,$$

$$2dx = dt \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{dt}{2}.$$

3. Теперь вместо $2x+3$ и dx в подынтегральное выражение подставим их выражения через новую переменную t. Тогда получим:

$$\int e^{2x+3}dx = \frac{1}{2}\int e^{t}dt = \frac{1}{2}e^{t} + C.$$

4. Возвращаемся к прежней переменной x:

$$\frac{1}{2}e^{t} + C = \frac{1}{2}e^{2x+3} + C.$$

Таким образом, мы получили искомый интеграл: $\int e^{2x+3}dx = \frac{1}{2}e^{2x+3} + C$. Можно убедиться в правильности решения, если продифференцировать полученную первообразную:

$$\left(\frac{1}{2}e^{2x+3} + C\right)' = \frac{1}{2}e^{2x+3}\cdot(2x+3)' = \frac{1}{2}e^{2x+3}\cdot 2 = e^{2x+3}.$$

Интегрирование по частям

Данный метод применяется в том случае, когда подынтегральное выражение представляет собой произведение какой-то функции u на дифференциал другой функции dv.

Интегрирование производится по формуле:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Способ интегрирования по частям применяется в том случае, когда интеграл $\int v\,du$ оказывается более удобным для интегрирования (возможно даже, табличным), чем исходный интеграл $\int u\,dv$.

Пример 2.3: Вычислить интеграл: $\int x\ln x dx$.

Решение.

Применим формулу интегрирования по частям $\int u\,dv = uv - \int v\,du$.

Положим $\quad u = \ln x, \qquad dv = xdx,$

тогда $\quad du = d(\ln x) = \frac{1}{x}dx; \qquad \int dv = \int xdx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2}.$

По формуле получим:

$$\int x\ln x dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2} + C.$$

В некоторых случаях для сведения данного интеграла к табличному формула интегрирования по частям применяется несколько раз.

§ 2.3. Понятие определенного интеграла

Понятие определенного интеграла широко используется в математике и в различных прикладных науках. Например, при вычислении площадей фигур, ограниченных кривыми, объемов тел произвольной формы, работы переменной силы, и т. д. В свою очередь, задача вычисления площади криволинейной трапеции приводит к определению понятия определенного интеграла.

Пусть имеется непрерывная функция $y = f(x)$ на отрезке $[a;b]$. Фигура, ограниченная данной кривой $y = f(x)$, отрезком $[a;b]$ оси абсцисс и прямыми $x = a$ и $y = b$, называется **криволинейной трапецией** (рис. 2.1).

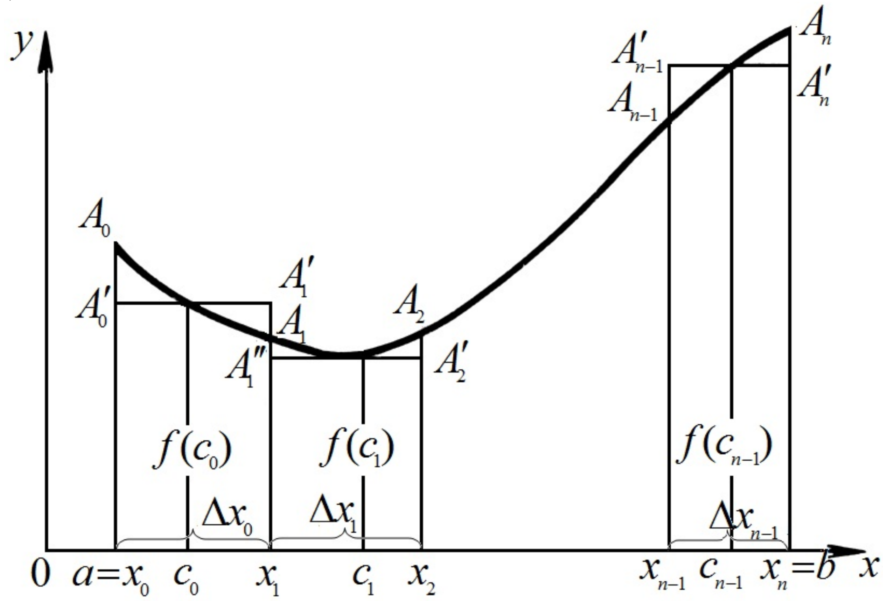


Рис. 2.1

Предположим, что $f(x) > 0$ на отрезке $[a;b]$, т.е. криволинейная трапеция расположена над осью *Ox*. Найдём площадь этой криволинейной трапеции. Для этого:

1) Разобьем отрезок $[a;b]$ на n необязательно равных частей и обозначим точки деления следующим образом:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 ... < x_n = b.$$

2) Из этих точек $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$ восставим перпендикуляры до пересечения с кривой $y = f(x)$. Получим значения функции в этих точках:

$$y = f(x_0); \quad y_1 = f(x_1); \quad y_2 = f(x_2); \quad ...; \quad y_{n-1} = f(x_{n-1}); \quad y_n = f(x_n).$$

Таким образом, мы всю нашу криволинейную трапецию разбили на n элементарных трапеций.

3) На отрезках $[x_0, x_1], [x_1, x_2], ..., [x_{n-1}, x_n]$ возьмем произвольные точки $C_0, C_1, C_2, ..., C_{n-1}$ и проведем перпендикуляры из этих точек до

пересечения с кривой $y = f(x)$. Получим $f(C_0), f(C_1), f(C_2), \ldots, f(C_{n-1})$. Построим ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников с основаниями Δx_i и высотами $f(C_i)$.

4) Элементарная площадь i-го прямоугольника будет равна:

$$S_i = f(C_i)(x_{i+1} - x_i) = f(C_i) \cdot \Delta x_i .$$

5) Площадь всей ступенчатой фигуры, покрывающей криволинейную трапецию, будет равна сумме площадей прямоугольников, из которых состоит ступенчатая фигура:

$$S_n = f(C_0)(x_1 - x_0) + f(C_1)(x_2 - x_1) + \ldots + f(C_{n-1})(x_n - x_{n-1}) =$$
$$= f(C_0) \cdot \Delta x_0 + f(C_1) \cdot \Delta x_1 + \ldots + f(C_{n-1}) \cdot \Delta x_{n-1} .$$

Для сокращения записи этой суммы вводят символ $\sum$ (сигма) – знак, означающий суммирование величин. Тогда

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(C_i)(x_{i-1} - x_i) = \sum_{i=0}^{n-1} f(C_i) \cdot \Delta x_i .$$

Эта сумма S_n, которая называется **интегральной суммой**, может быть больше или меньше истинного значения площади искомой трапеции. Наиболее близким значением к истинной величине площади будет предел интегральной суммы при условии, что элементарные отрезки Δx_i будут очень маленькими, т. е. длинна наибольшего из них будет стремиться к нулю $(\max \Delta x_i \to 0)$, а их самих будет больше $(n \to \infty)$. Тогда:

$$S = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=0}^{n-1} f(C_i) . \Delta x_i .$$

Этот предел интегральной суммы (если он существует) называется **определённым интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ и обозначается**:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=0}^{n-1} f(C_i)\Delta x_i$$

– читается «*определённый интеграл от a до b эф от икс дэ икс*». Числа a и b называются соответственно нижним и верхним пределами интегрирования, $f(x)$ – подынтегральной функцией, $f(x)dx$ – подынтегральным выражением, x – переменной интегрирования.

Таким образом, **площадь криволинейной трапеции численно равна интегралу от функции, ограничивающей трапецию, взятому на интервале интегрирования** $[a;b]$:

$$S = \int_a^b f(x)\,dx .$$

Это и есть **геометрический смысл определённого интеграла**.

Примечание: Определённый интеграл – это **число**, в отличие от неопределённого интеграла, который равен совокупности функций – первообразных.

Необходимое условие существования определенного интеграла. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, то она ограничена на этом отрезке, то есть $m \le f(x) \le M$, если $x \in [a,b]$.

Достаточное условие существования определенного интеграла. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она интегрируема на этом отрезке.

Основные свойства определенного интеграла

Рассмотрим **свойства определенного интеграла**:

1. Определённый интеграл не зависит от обозначения переменной интегрирования, т.е.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{t_0}^{t} f(t)\,dt = \int_{u_0}^{u} f(u)\,du.$$

2. Определённый интеграл от суммы конечного числа непрерывных функций, заданных на отрезке $[a,b]$ равен сумме определённых интегралов слагаемых функций:

$$\int_a^b (f_1(x) + f_2(x) + \ldots)\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx + \ldots$$

3. Постоянный множитель k в подынтегральном выражении можно выносить за знак интеграла:

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx.$$

4. Если верхний и нижний пределы интегрирования поменять местами, то определённый интеграл изменит свой знак на противоположный:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

Если пределы интегрирования равны между собой $(b = a)$, то определенный интеграл равен нулю:

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

5. Если функция интегрируема на отрезке $[a,b]$, то для любого $c \in (a,b)$ она интегрируема на отрезках $[a,c]$ и $[c,b]$, причем

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Данное свойство может быть представлено в следующей форме: если функция интегрируема на отрезке, содержащем точки *a, b, c*, то

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx + \int_c^a f(x)\,dx = 0.$$

6. $\int_a^b dx = b - a$ при $a \neq b$.

7. Если подынтегральная функция на отрезке $[a,b]$ сохраняет постоянный знак, то и определенный интеграл будет представлен числом того же знака, что и функция, т.е. если $f(x) > 0$, $a < b$, то и $\int_a^b f(x)\,dx > 0$.

Существуют и другие свойства определенного интеграла, которые мы рассматривать не будем.

§ 2.4. Определенный интеграл с переменным верхним пределом

Введем понятие интеграла с переменным верхним пределом. Каждому числу x поставим в соответствие число

$$\int_a^x f(t)\,dt = \Phi(x),$$

т.е. получим функцию от *x*. Эта функция называется **определенным интегралом с переменным верхним пределом**.

Примечание. В интеграле $\int_a^x f(t)\,dt = \Phi(x)$ переменная интегрирования обозначена буквой *t* для отличия ее от переменной *x* верхнего предела интеграла. Так как определенный интеграл от обозначения переменной не зависит, можно записать его в виде $\int_a^x f(x)\,dx$.

Теорема 2.1. Производная от определенного интеграла $\int_a^x f(x)\,dx$ равна подынтегральной функции $f(x)$, или определенный интеграл с переменным верхним пределом есть первообразная для подынтегральной функции:

$$\left(\int_a^x f(t)\,dt \right)' = \Phi'(x) = f(x).$$

§ 2.5. Формула Ньютона-Лейбница. Методы вычисления определенных интегралов

Как отмечалось выше, неопределённый интеграл – это совокупность первообразных функций, а определённый интеграл – число. Между ними существует определённая связь, которую устанавливает формула Ньютона – Лейбница и выражается в виде теоремы.

Теорема 2.2. Значение определённого интеграла равно разности значений любой первообразной от подынтегральной функции, взятой при верхнем и нижним пределах интегрирования:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\big|_a^b = F(b) - F(a), \text{ где } F'(x) = f(x).$$

Таким образом, нахождение определённого интеграла сводится к следующим операциям:

1) находят первообразную для данной функции;

2) вычисляют первообразную для данных частных значений верхнего и нижнего пределов интегрирования (подставляют пределы интегрирования в первообразную вместо x);

3) находят разность частных значений первообразной $F(b) - F(a)$.

Пример 2.4. Вычислить интеграл $\int_2^3 x^3 dx$.

Решение.

$$\int_2^3 x^3 dx = \frac{x^4}{4}\Big|_2^3 = \frac{3^4}{4} - \frac{2^4}{4} = \frac{81}{4} - \frac{16}{4} = 20{,}25 - 4 = 16{,}25.$$

Как и для неопределённого интеграла, этот метод называется **методом непосредственного интегрирования.** Он применим для наиболее простых функций и использует первообразные, которые есть в таблице неопределенных интегралов. Если же интегрируемая функция является сложной, и её непосредственно проинтегрировать не получается, то применяют другие методы, например, метод замены переменной.

Замена переменных в определенном интеграле. Интегрирование по частям

Из установленной с помощью формулы Ньютона-Лейбница связи между определённым и неопределенным интегралами следует, что для вычисления определённого интеграла можно также применять **метод замены переменной**. Так же, как и для неопределенного интеграла, вводится новая переменная, с помощью которой интеграл становится более простым для вычисления. Отличие состоит в том, что при этом обязательно нужно заменить пределы интегрирования определенного интеграла.

Рассмотрим применение метода замены переменной интегрирования для вычисления определенного интеграла на примере. Найдем определенный интеграл

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} \cdot \cos x \, dx .$$

Последовательность действий следующая:

1. Введём новую переменную t, связанную с x следующей зависимостью:

$$t = \sin x .$$

2. Возьмём дифференциал от левой и правой части этого равенства:

$$dt = d(\sin x) ,$$

$$dt = \cos x \, dx ,$$

$$dx = \frac{dt}{\cos x} .$$

3. Найдем новые пределы интегрирования, т. к., согласно свойству определенного интеграла, изменение переменной интегрирования требует изменения пределов интегрирования:

$$t_{верх} = \sin\frac{\pi}{2} = 1; \qquad t_{нижн} = \sin 0 = 0 .$$

4. Теперь вместо $\sin x$ и dx в подынтегральное выражение подставим их выражения через новую переменную t, а вместо старых пределов подставим новые и применим формулу Ньютона – Лейбница:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} \cdot \cos x \, dx = \int_0^1 e^t dt = e^t \Big|_0^1 = e^1 - e^0 = 2{,}7 - 1 = 1{,}7 .$$

Таким образом, мы вычислили определенный интеграл.

Примечание. Новая переменная выбирается так, чтобы новый интеграл стал табличным.

Определенный интеграл может быть вычислен **методом интегрирования по частям**. Если функции u и v имеют непрерывные производные на отрезке $[a,b]$, то для определенного интеграла справедлива формула:

$$\int_a^b u\,dv = uv\,\Big|_a^b - \int_a^b v\,du\,.$$

Пример 2.5: Вычислить интеграл: $\int_1^2 \ln x\,dx$.

Решение.

Применим формулу интегрирования по частям

$$\int_a^b u\,dv = u\,v\,\Big|_a^b - \int_a^b v\,du\,.$$

Положим $u = \ln x,\ dv = dx$, тогда $du = \frac{1}{x}dx;\ \int dv = \int dx\ ,\ \ v = x$.

По формуле получим:

$$\int_1^2 \ln x\,dx = x\ln x\Big|_1^2 - \int_1^2 x\cdot\frac{1}{x}dx = 2\ln 2 - \ln 1 - x\,\Big|_1^2 =$$

$$= 2\ln 2 - 2 + 1 = 2\ln 2 - 1.$$

§ 2.6. Применение определенного интеграла к вычислению площади плоской фигуры и расчету работы переменной силы

Вычисление площадей плоских фигур

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$. Если $f(x) > 0$, то площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$, численно равна интегралу:

$$S = \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Если $f(x) \le 0$, то площадь соответствующей криволинейной трапеции определяется формулой

$$S = \left|\int_a^b f(x)\,dx\right|.$$

Если кривая $y = f(x)$ пересекает ось Ox, то отрезок $[a;b]$ нужно разбить на части, в пределах которых $f(x)$ не меняет знака. К каждой такой площади необходимо применить формулу $S = \int_a^b f(x)\,dx$ или $S = \left|\int_a^b f(x)\,dx\right|$, и общая площадь будет равна сумме частей.

Пример 2.6. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной графиком функции $y = \sin x$ и осью абсцисс при условии $0 \le x \le 2\pi$.

Решение.

Сделаем чертеж (рис. 2.2). Разбиваем сегмент $[0;2\pi]$ на два сегмента $[0;\pi]$ и $[\pi;2\pi]$. На первом из них $\sin x \ge 0$, на втором – $\sin x \le 0$. Следовательно, искомая площадь равна

$$S = \int_0^{\pi} \sin x\, dx + \left| \int_{\pi}^{2\pi} \sin x\, dx \right| = -\cos x\Big|_0^{\pi} + \left| -\cos x\Big|_{\pi}^{2\pi} \right| = 4.$$

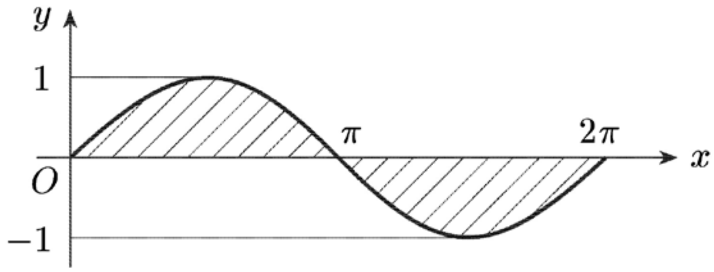


Рис. 2.2

Работа переменной силы

Рассмотрим пример, когда тело движется по прямой *MN* под действием переменной силы $F = f(s)$ (рис. 2.3). Направление силы совпадает с направлением движения. Требуется вычислить работу, производимую силой $F = f(s)$ при перемещении тела из положения *M* и положение *N*.

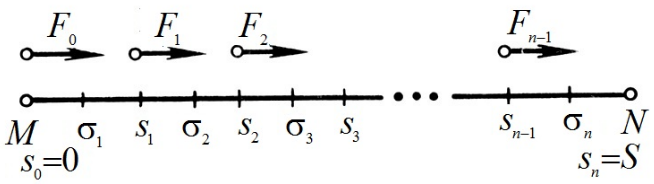


Рис.2.3

Разобьем путь *MN* точками $s_0 = 0, s_1, s_2, \dots, s_{n-1}, s_n = S$ на n элементарных отрезков $[s_{i-1}, s_i]$ длиной $\Delta s_i = s_i - s_{i-1}$ $(i = 0, 1, 2, \dots, n)$. В каждом элементарном отрезке выберем точку σ_i $(i = 0, 1, 2, \dots, n)$. Положим, что сила $f(\sigma_i)$ на каждом элементарном отрезке постоянна. Тогда произведение $f(\sigma_i)\Delta s_i$ будет приближенно равно работе силы на пути Δs_i. Сумма работ на элементарных отрезках

$$A_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(\sigma_i)\Delta s_i$$

приближенно равна работе силы $F = f(s)$ на пути MN.

Данная сумма является интегральной. Предел ее при $n \to \infty$ и $\max \Delta s_i \to 0$ выражает работу переменной силы $F = f(s)$ на пути MN:

$$A_n = \lim_{\max \Delta s_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\sigma_i)\Delta s_i = \int_0^s f(s)\,ds,$$

т.е. работа переменной силы $F = f(s)$ численно равна интегралу от силы, взятому по пути s.

Пример 2.7. Вычислить работу, совершенную одним молем идеального газа, находящегося в цилиндрическом сосуде под поршнем, при обратимом изотермическом расширении от $2{,}24 \cdot 10^{-3}\ м^3$ до $22{,}4 \cdot 10^{-3}\ м^3$ при $t = 0°C$.

Решение.

Газ, находящийся в цилиндрическом сосуде под поршнем, расширяется от V_1 до V_2 (рис. 2.4), при этом поршень перемещается на расстояние $\Delta l = l_2 - l_1$, а объем изменяется на $\Delta V = V_2 - V_1$.

На поршень, площадь поперечного сечения которого S, со стороны газа вследствие давления p действует сила $F = pS$.

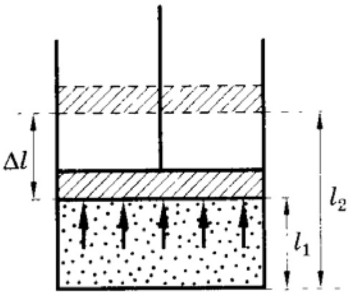


Рис. 2.4

Так как направление этой силы совпадает с направлением перемещения поршня, то работа, совершаемая газом,

$$A = F \cdot \Delta l = pS\,\Delta l = p\,\Delta V.$$

Если при изменении объема давление газа изменяется, то следует вычислять элементарную работу, соответствующую достаточно малому изменению объема

$$dA = p\,dV.$$

При обратимом расширении одного моля идеального газа давление вычисляется по формуле

$$p = \frac{RT}{V},$$

где $R = 8{,}31 \frac{Дж}{моль \cdot K}$ – универсальная газовая постоянная, T – температура газа в Кельвинах. В нашем случае $T = 273K$.

Полная работа расширения газа от начального объема V_1 до конечного объема V_2 будет равна:

$$A=\int_{V_1}^{V_2} p\,dV=\int_{V_1}^{V_2}\frac{RT}{V}dV=RT\int_{V_1}^{V_2}\frac{dV}{V}=RT\ln V\,\Big|_{V_1}^{V_2}=RT\ln\frac{V_2}{V_1}=$$

$$=8{,}31\cdot 273\cdot \ln\frac{22{,}4\cdot 10^{-3}}{2{,}24\cdot 10^{-3}}=5{,}23\ \text{кДж}$$

Вопросы для самоконтроля

1. Какое действие называется интегрированием?
2. Какую функцию называют первообразной для данной функции $f(x)$?
3. Сколько первообразных может существовать для каждой функции? Чем отличаются друг от друга эти первообразные?
4. Что называется неопределённым интегралом?
5. Что значит проинтегрировать функцию?
6. Каким действием проверяется результат интегрирования?
7. Какими свойствами обладает неопределённый интеграл?
8. Указать известные методы вычисления неопределённых интегралов?
9. Правила нахождения неопределённых интегралов методом непосредственного интегрирования.
10. Правила нахождения неопределённого интеграла методом замены переменных (методом подстановки).
11. Правила нахождения неопределённого интеграла методом интегрирования по частям.
12. Что называется криволинейной трапецией?
13. Что такое интегральная сумма?
14. Что называется определённым интегралом?
В чём заключается геометрический смысл определённого интеграла?
15. Свойства определенного интеграла.
16. Что называется определённым интегралом с переменным верхним пределом?
17. Какая связь существует между неопределенным и определенным интегралом? Запишите соответствующую формулу.
18. Какие Вам известны методы вычисления определённых интегралов?
19. Правила нахождения определённого интеграла методом замены переменных (методом подстановки).
20. Правила нахождения определённого интеграла методом интегрирования по частям.

Задания для решения

Вычислить неопределенный интеграл:

1. $\int (x^2+1)\,dx$;
2. $\int (5x^2-1)\,dx$;
3. $\int (\cos x + x)\,dx$;
4. $\int (1-\cos 3x)\,dx$;
5. $\int \frac{1}{\sqrt{3x-2}}\,dx$;
6. $\int \frac{1}{(5x-7)^3}\,dx$;
7. $\int \frac{3}{\cos^2 5x}\,dx$;
8. $\int \left(7\sin\frac{x}{3} + \frac{2}{\cos^2 4x}\right)dx$;
9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$;
10. $\int \frac{x^4}{1+x^2}\,dx$;
11. $\int \sin^2 \frac{x}{2}\,dx$;
12. $\int 2e^{\sin x}\cdot\cos x\,dx$;
13. $\int \cos^2 x\,dx$;
14. $\int \cos^3 x \cdot \sin x\,dx$;
15. $\int e^{x^3}\cdot x^2\,dx$;
16. $\int x\cdot e^x\,dx$;
17. $\int e^x \sin x\,dx$;
18. $\int x \sin 2x\,dx$;
19. $\int \ln x\,dx$;
20. $\int x \ln^2 x\,dx$.

Вычислить определенный интеграл:

21. $\int\limits_{-1}^{2} x^2 dx$;
22. $\int\limits_{0}^{3} 2^{5x+1} dx$;
23. $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{x}$;
24. $\int\limits_{0}^{4} \sqrt{x}\,dx$;
25. $\int\limits_{0}^{\pi} \sin x\,dx$;
26. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$;
27. $\int\limits_{0}^{1} e^{3x-2} dx$;
28. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\,dx$;
29. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}} e^{\cos x}\cdot \sin x\,dx$;
30. $\int\limits_{-1}^{2} \frac{dx}{(2x+1)^2}$;
31. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \cos^2 x\,dx$;
32. $\int\limits_{1}^{6} \frac{dx}{\sqrt{x+3}}$;

33. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx$;

34. $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{x^3}$;

35. $\int\limits_1^2 x^3 \ln x\,dx$;

36. $\int\limits_0^1 (x+1)\cdot \mathrm{e}^{-x}\,dx$;

37. $\int\limits_{-1}^{1} x^2 \mathrm{e}^{-x}\,dx$;

38. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1+5x}}$;

39. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$;

40. $\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{e}^x\,dx}{1+\mathrm{e}^{2x}}$.

41. Скорость укорочения мышцы описывается уравнением $\frac{dx}{dt}=B(x_0-x)$, где x_0 – полное укорочение мышцы; x – укорочение мышцы в данный момент; B – постоянная, зависящая от нагрузки. Записать закон сокращения мышцы $x=x(t)$, если в момент времени $t=0$ укорочение мышцы было равно нулю.

42. Скорость движения кисти руки задана уравнением $v=\frac{1}{2}t^2+3\,(см/с)$. Найти уравнение движения кисти, если за первые 6 секунд было пройдено 40 см.

43. Угловая скорость вращения барабана кимографа $\omega=6t^2-4t+5$. Найти угол поворота, если за $t=2\ с$ был совершен поворот на $\varphi=2\ рад$.

44. Скорость распада радиоактивного вещества $v=-km_0\mathrm{e}^{-kt}$, где k – постоянная, m_0 – масса радиоактивного вещества при $t=t_0$. Составить уравнение изменения массы $m(t)$.

45. Скорость растворения лекарственного вещества из таблетки $v=-c_0\,k\,F\,\mathrm{e}^{-kFt}$, где c_0 – концентрация лекарственного вещества при $t=0$, k – постоянная растворения, F – площадь поверхности растворяемого вещества в единице объема. Составить уравнение растворения лекарственного вещества, если при $t=0$ $c=c_s-c_0$, где c_s – концентрация насыщения.

46. Вычислить площадь фигуры, заключенной между кривой $y=\sin x$ и осью Ox, в пределах от 0 до π.

47. Вычислить площадь фигуры, заключенной между кривыми $y_1=x^3$ и $y_2=4x$.

48. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой

$y = x^2 + 2$ и прямой $x + y = 4$.

49. Пользуясь методом интегрирования, вычислить площадь круга $x^2 + y^2 = R^2$.

50. Вычислить силу давления воды на стенку аквариума с основанием 1,8 м и высотой 0,6 м.

51. Через участок тела животного проходит импульс тока, который изменяется с течением времени по закону $J = 20e^{-5t}$ (мА). Длительность импульса 0,1 с. Вычислить работу, совершаемую током за это время, если сопротивление участка 20 кОм.

52. Найти работу при растяжении мышцы на 4 см, если для ее растяжения на 1 см требуется нагрузка 10 Н. Считать, что сила, необходимая для растяжения мышц, пропорциональна ее удлинению.

53. Через участок тела животного проходит импульс тока, который изменяется с течением времени по закону $J = 10\mathrm{e}^{-3t}$ (мА). Длительность импульса 0,1 с. Вычислить заряд, протекающий через тело животного.

54. Вычислить работу, произведенную при сжатии пружины на 0,03м, если известно, что для укорочения ее на 0,005 м нужно приложить силу в 10 Н.

55. Реакция организма на определенную дозу лекарственного препарата $f(t) = 1/(1+t^2)$ в момент времени *t*. Вычислить суммарную реакцию на данную дозу.

ГЛАВА III
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 3.1. Основные понятия и определения теории дифференциальных уравнений

Многие задачи естествознания приводят к появлению уравнений, в которых помимо неизвестной функции y и аргумента x входят производные (или дифференциалы) этой функции.

Уравнение, связывающее независимую переменную x, искомую функцию $f(x)$ и её производные $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ …, $f^{(n)}(x)$ или дифференциалы df, $d^2 f$, $d^3 f$, …, $d^n f$ называется **обыкновенным дифференциальным уравнением**.

Дифференциальное уравнение в общем виде можно записать так:

$$F[x, f(x), f'(x), f''(x),..., f^{(n)}(x)] = 0$$

или
$$F[x, y, y', y'',..., y^{(n)}] = 0,$$

где F – заданная функция от $(n+2)$ переменных.

Если искомая функция зависит от нескольких аргументов, то дифференциальное уравнение называется **уравнением в частных производных.**

Дифференциальные уравнения принято классифицировать по порядку производной (или дифференциала) от искомой функции, входящей в уравнение. Наивысший порядок этой производной и определяет **порядок дифференциального уравнения**. Например,

$$y''' + 2xy^4 = 0$$

есть обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка, а уравнение не затухающего гармонического колебания

$$\frac{d^2S}{dt^2} + \omega_0{}^2 S = 0$$

является обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка.

Примером дифференциального уравнения в частных производных являются уравнения Максвелла. Для случая плоской электромагнитной волны они имеют вид:

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \mu \frac{\partial H}{\partial t} \quad \text{и} \quad \frac{\partial H}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t}.$$

и являются дифференциальными уравнениями первого порядка.

Решением дифференциального уравнения называется всякая функция $y = f(x)$, которая, будучи подставлена в уравнение, превращает его в тождество. Решение, заданное в неявной форме $f(x,y)=0$, называют **интегралом дифференциального уравнения.**

Решить уравнение или, как говорят, проинтегрировать его – это значит найти его общее решение.

Общим решением дифференциального уравнения n-го порядка называется функция $y = f(x, C_1, C_2, ..., C_n)$ от x с произвольными постоянными $C_1, C_2, ..., C_n$ обращающая это уравнение в тождество.

Решение, которое получается из общего решения при некоторых фиксированных значениях произвольных постоянных C, называется **частным решением.**

При этом задаются не сами постоянные, а условие, которому должно удовлетворять искомое частное решение. Задание таких условий называется заданием начальных условий и кратко записывается так: при $x = x_0$, $f(x_0) = y_0$, $f'(x_0) = y'_0$ и т.д.

Задача нахождения частного решения, удовлетворяющего начальным условиям, называется **задачей Коши**.

К сожалению, для многих типов дифференциальных уравнений решение можно найти далеко не всегда. Это является сложнейшей математической задачей. Однако для некоторых типов дифференциальных уравнений решение находится сравнительно легко. К таким уравнениям относятся линейные и некоторые другие типы дифференциальных уравнений 1-го порядка, линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами (любого порядка).

§ 3.2. Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными

Дифференциальное уравнение вида

$$f_1(x)\varphi_1(y)\,dx + f_2(x)\varphi_2(y)\,dy = 0$$

называется **дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными**.

Суть разделения переменных заключается в том, чтобы преобразовать данное уравнение в такое, левая часть которого будет суммой двух дифференциалов, один из которых зависит только от x, а второй – только от y.

Слагаемые, включающие только одну переменную, можно получить, если дифференциальное уравнение разделить на $\varphi_1(y) f_2(x)$. Тогда получим:

$$\frac{f_1(x)\varphi_1(y)}{\varphi_1(y) f_2(x)}\,dx + \frac{f_2(x)\varphi_2(y)}{\varphi_1(y) f_2(x)}\,dy = 0$$

при условии, что $\varphi_1(y)\,f_2(x) \neq 0$. После сокращения получаем

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\,dx + \frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}\,dy = 0$$

Интегрируя это уравнение, получим его общий интеграл в виде:

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}\,dx + \int \frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}\,dy = C\,,$$

где C – произвольная постоянная. Найдя из последнего уравнения y, получим общее решение $y = y(x, C)$.

Пример 3.1. Найти общее и частное решение дифференциального уравнения $y' = 2xy$ при $x = 0$, $y = 2$.

Решение.

Перепишем уравнение иначе $\dfrac{dy}{dx} = 2xy$ или $\dfrac{dy}{y} = 2x\,dx$.

Интегрируя, получаем $\displaystyle\int \frac{dy}{y} = 2\int x\,dx$ или $\ln y = x^2 + \ln C$.

Преобразуем полученное уравнение $\ln y = \ln \mathrm{e}^{x^2} + \ln C$, $y = C \cdot \mathrm{e}^{x^2}$ – общее решение.

Запишем частное решение данного уравнения, исходя из начальных данных:

$$2 = C \cdot \mathrm{e}^0, \qquad C = 2,$$

$$y = 2\mathrm{e}^{x^2} \text{ – частное решение.}$$

Пример 3.2. Найти общее и частное решения дифференциального уравнения $xy' = y$ при условии, что $y = 3$, если $x = 1$.

Решение.

Поступая аналогично предыдущему примеру, получаем:

$$x\frac{dy}{dx} = y \quad \text{или} \quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}.$$

Интегрируя, находим: $\displaystyle\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$ или $\ln y = \ln x + C$.

Потенцируя, получаем общее решение: $y = \mathrm{e}^{\ln x + C}$

Подставляя значения y и x из начальных условий, получаем $3 = \mathrm{e}^C$, т.е. $C = \ln 3$.

Тогда частное решение будет иметь вид

$$y = \mathrm{e}^{\ln x + \ln 3} = \mathrm{e}^{\ln 3x} = 3x.$$

Обращаем внимание на то, что произвольная постоянная C в данном случае выражается через логарифм. Это позволяет в тех случаях, когда решение получается в логарифмической форме вводить C сразу под знаком логарифма, то есть

$$\ln y = \ln x + \ln C = \ln Cx.$$

Тогда общее решение будет иметь вид $y = Cx$

Подставляя значения y и x из начальных условий, получим значение $3 = C \cdot 1$, то есть $C = 3$ и частное решение будет $y = 3x$.

Общее правило решения дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными

1. Производные y', входящие в уравнения, необходимо записать в виде дроби $\frac{dy}{dx}$.

2. С помощью алгебраических операций преобразовать уравнение так, чтобы члены, содержащие y, находились в левой части равенства, а члены, содержащие x, в правой.

3. Проинтегрировать полученное равенство в соответствии с правилами вычисления интегралов. При этом левая часть интегрируется по аргументу y, а правая по аргументу x. Постоянная интегрирования C добавляется в правую часть равенства после вычисления интеграла по x.

4. Полученное после интегрирования уравнение решается относительно y (если это возможно) и находится общее решение.

5. Подставляя в общее решение, значения x и y из начальных (дополнительных) условий, находят значение постоянной C и вид частного решения.

§ 3.3. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка

Дифференциальное уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

называется **однородным дифференциальным уравнением первого порядка**, если функция $f(x, y)$ может быть представлена как функция отношения своих аргументов: $f(x, y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$. Тогда

$$\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Однородное дифференциальное уравнение $\frac{dy}{dx}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ приводится к уравнению с разделяющимися переменными подстановкой $u=\frac{y}{x}$, где u – новая неизвестная функция. Произведя замену $y=xu$, мы придем к уравнению с разделяющимися переменными. Продифференцируем $y=xu$:

$$\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx},$$

и уравнение $\frac{dy}{dx}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ примет вид

$$u+x\frac{du}{dx}=\varphi(u) \qquad \text{или} \qquad x\,du=(\varphi(u)-u)\,dx.$$

Разделим в последнем уравнении переменные:

$$\frac{du}{(\varphi(u)-u)}=\frac{dx}{x}.$$

Выполнив интегрирование, найдем

$$\int\frac{du}{(\varphi(u)-u)}=\int\frac{dx}{x} \qquad \text{или} \qquad \int\frac{du}{(\varphi(u)-u)}=\ln|x|+C$$

Взяв интеграл в левой части последнего равенства и выполнив обратную замену $u=\frac{y}{x}$, получим общий интеграл однородного уравнения $\frac{dy}{dx}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$.

Пример 3.3. Решить однородное дифференциальное уравнение: $(x^2+y^2)dx-xydy=0$.

Решение.

Запишем исходное уравнение виде: $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+y^2}{xy}$. Поделив числитель и знаменатель правой части уравнения на x^2, получим:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}{\frac{y}{x}}.$$

Данное уравнение является однородным.

Для решения этого уравнения введем новую функцию $u = \dfrac{y}{x}$, откуда $y = xu$. Дифференцируя $y = xu$, получаем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(ux) = u + x\frac{du}{dx}.$$

Подставим это выражение в последнее уравнение, получим:

$$u + x\frac{du}{dx} = \frac{1+u^2}{u}.$$

Данное уравнение является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными: $x\dfrac{du}{dx} = \dfrac{1+u^2}{u} - u$ или $x\dfrac{du}{dx} = \dfrac{1}{u}$, откуда $u\,du = \dfrac{dx}{x}$.

Интегрируя это уравнение, получим $\int u\,du = \int \dfrac{dx}{x}$ или $\ln x = \dfrac{u^2}{2} + \ln C$, откуда $\ln\dfrac{x}{C} = \dfrac{u^2}{2}$, т.е. $x = C\mathrm{e}^{\frac{u^2}{2}}$.

Выполнив обратную замену $u = \dfrac{y}{x}$, окончательно получим: $x = C\mathrm{e}^{\frac{y^2}{2x^2}}$. Это – общий интеграл. Решив последнее уравнение относительно y, получим общее решение $y = \sqrt{2x^2(\ln x + \ln C)}$.

§ 3.4. Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка

Дифференциальное уравнение вида $F(x, y, y', y'') = 0$, в которое входит вторая производная неизвестной функции $y = f(x)$, называют **дифференциальным уравнением второго порядка.**

Рассмотрим уравнения второго порядка, которые могут быть записаны в виде, разрешенном относительно второй производной: $y'' = f(x, y, y')$.

При некоторых ограничениях дифференциальное уравнение второго порядка $y'' = f(x, y, y')$ имеет общее решение $y = \varphi(x, C_1, C_2)$, содержащее две произвольные постоянные.

Рассмотрим некоторые виды дифференциальных уравнений второго порядка, приводимых к дифференциальным уравнениям первого порядка.

Дифференциальные уравнения второго порядка, не содержащие искомой функции и её производной

Уравнение вида $y'' = f(x)$ называют **линейным дифференциальным уравнением второго порядка, не содержащим искомой функции и её производной**. Такие уравнения решаются двукратным интегрированием с введением новой функции, дающей возможность понизить их порядок.

Введем новую функцию $u(x)$, положив $y' = u(x)$, тогда $y'' = (y')' = u'(x)$, $u'(x) = f(x)$; или $\dfrac{du}{dx} = f(x)$. Разделив переменные и проинтегрировав, получим:

$$du = f(x)\,dx; \qquad \int du = \int f(x)\,dx; \qquad u(x) = \int f(x)\,dx + C_1$$

или
$$y' = \int f(x)\,dx + C_1; \qquad \frac{dy}{dx} = \int f(x)\,dx + C_1;$$

Снова разделим переменные и проинтегрируем:

$$dy = \left(\int f(x)\,dx + C_1\right)dx; \qquad \int dy = \int\left(\int f(x)dx + C_1\right)dx.$$

Таким образом, $y = \int\left(\int f(x)dx\right)dx + C_1x + C_2$ – общее решение дифференциального уравнения $y'' = f(x)$.

Пример 3.4. Найти общее решение уравнения $y'' = x$.

Решение.

Обозначим $y' = u(x)$, тогда $y'' = (y')' = u'(x)$ и $u'(x) = x$ или $\dfrac{du}{dx} = x$. Разделив переменные и проинтегрировав, найдем первую производную:

$$du = x\,dx; \qquad \int du = \int x\,dx; \qquad u = \frac{x^2}{2} + C_1$$

или
$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{2} + C_1.$$

Разделив в последнем уравнении переменные и проинтегрировав его, найдем искомую функцию *y*:

$$dy = \frac{x^2}{2}dx + C_1\,dx;$$

$$\int dy = \int \frac{x^2}{2}dx + \int C_1\,dx.$$

Таким образом, $y = \dfrac{x^3}{6} + C_1x + C_2$ – общее решение уравнения, содержащее две произвольные постоянные C_1 и C_2.

Дифференциальные уравнения второго порядка,
не содержащие искомой функции

Уравнение вида $y'' = f(x, y')$ называют **дифференциальным уравнением второго порядка, не содержащим искомой функции**.

Введем новую функцию $y' = z(x)$, получим уравнение первого порядка относительно *z*:

$$z' = f(x, z).$$

Если решение этого уравнения $z = \varphi(x, C_1)$, то искомое решение получим, интегрируя равенство $y' = z$, т.е. $\dfrac{dy}{dx} = \varphi(x, C_1)$; $dy = \varphi(x, C_1)\,dx$; $\int dy = \int \varphi(x, C_1)\,dx$, откуда $y = \int \varphi(x, C_1)\,dx + C_2$ – общее решение дифференциального уравнения $y'' = f(x, y')$.

Пример 3.5. Найдем общее решение уравнения

$$(1 + x^2)y'' - 2y'x = 0.$$

Решение.

Это уравнение не содержит искомой функции *y*. Обозначим $y' = z(x)$, $y'' = (y')' = z'(x)$, тогда

$$(1 + x^2)z' - 2zx = 0 \qquad \text{или} \qquad (1 + x^2)\frac{dz}{dx} - 2zx = 0.$$

Разделив переменные и проинтегрировав, получим:

$$\frac{dz}{z} = \frac{2x}{1 + x^2}dx; \qquad \int\frac{dz}{z} = \int\frac{2x}{1 + x^2}dx; \qquad \ln|z| = \ln\left|1 + x^2\right| + \ln|C_1|.$$

Потенцируем последнее выражение: $z = (1 + x^2)\cdot C_1$. Так как $z = y'$, то $y' = (1 + x^2)\cdot C_1$ или $\dfrac{dy}{dx} = (1 + x^2)\cdot C_1$. Разделив в последнем уравнении переменные и проинтегрировав его, найдем искомую функцию *y*:

$$dy = C_1(1 + x^2)\,dx; \qquad \int dy = \int C_1(1 + x^2)\,dx, \qquad y = C_1\frac{x^3}{3} + C_1x + C_2$$

Таким образом, $y = C_1\dfrac{x^3}{3} + C_1x + C_2$ – общее решение уравнения, содержащее две произвольные постоянные C_1 и C_2.

Дифференциальные уравнения второго порядка,
не содержащие аргумента

Уравнение вида $y'' = f(y, y')$ называют **дифференциальным уравнением второго порядка, не содержащим явным образом аргу-**

мента.

Для нахождения решения данного уравнения введем новую функцию $y' = p$, аргумент которой y: $y'' = p' = \dfrac{dp}{dx}$. Из равенства $y' = \dfrac{dy}{dx} = p$ найдем $dx = \dfrac{dy}{p}$ и подставим в равенство $y'' = \dfrac{dp}{dx} = \dfrac{dp}{dy} \cdot p$. Подставив выражения y'' и y' в уравнения $y'' = f(y, y')$, получим $p\dfrac{dp}{dy} = f(y, p)$.

Найдя решение последнего уравнения в виде $p = \varphi(y, C_1)$ или $\dfrac{dy}{dx} = \varphi(y, C_1)$.

Разделив переменные и проинтегрировав, получим:

$$\frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = dx; \qquad \int \frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = \int dx,$$

$\displaystyle\int \frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = x + C_2$ – общий интеграл уравнения $y'' = f(y, y')$.

Пример 3.6. Найти общее решение уравнения $yy'' + (y')^2 = 0$.

Решение.

Введем подстановку $y' = p = \dfrac{dy}{dx}$, откуда $dx = \dfrac{dy}{p}$. Так как $y'' = \dfrac{dp}{dx} = p \cdot \dfrac{dp}{dy}$, то $y \cdot p\dfrac{dp}{dy} - p^2 = 0$ есть уравнение с разделяющимися переменными. Разделим переменные и проинтегрируем уравнение:

$$yp\,dp - p^2 dy = 0, \qquad \frac{dp}{p} - \frac{dy}{y} = 0, \qquad \int\frac{dp}{p} - \int\frac{dy}{y} = \ln C_1,$$

$$\ln p - \ln y = \ln C_1.$$

Потенцируя, получим $\dfrac{p}{y} = C_1$, откуда $p = C_1 y$.

Подставляя вместо p его значение $\dfrac{dy}{dx}$, получим уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{dy}{dx} = C_1 y, \qquad \frac{dy}{y} = C_1\,dx, \qquad \int\frac{dy}{y} = \int C_1\,dx, \qquad \ln y = C_1 x + \ln C_2,$$

$$\ln y = \ln \mathrm{e}^{C_1 x} + \ln C_2.$$

Потенцируя, найдем общее решение в виде $y = C_2 \mathrm{e}^{C_1 x}$.

§ 3.5. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Уравнение вида: $y'' + py' + qy = f(x)$, где *p*, *q* – постоянные коэффициенты, а *f(x)* – некоторая функция, называют **линейными дифференциальными уравнениями второго порядка с постоянными коэффициентами**.

Если $f(x) = 0$ для всех *x*, то уравнение $y'' + py' + qy = 0$ называют **линейным однородным дифференциальным уравнением (ЛОДУ) второго порядка с постоянными коэффициентами.**

Решение такого дифференциального уравнения, как показал Эйлер, следует искать в виде следующих функций: $y = \mathrm{e}^{kx}$, где k – некоторый коэффициент. Подставим значения $y' = k\mathrm{e}^{kx}$ и $y'' = k^2\mathrm{e}^{kx}$, найденные из этой функции в уравнение. Тогда получим: $k^2\mathrm{e}^{kx} + pk\mathrm{e}^{kx} + q\mathrm{e}^{kx} = 0$ или $\mathrm{e}^{kx}(k^2 + pk + q) = 0$.

Для того чтобы функция $y = \mathrm{e}^{kx}$ была решением дифференциального уравнения, достаточно, чтобы $k^2 + pk + q = 0$. Это уравнение называют **характеристическим уравнением** и корни его определяются по формуле:

$$k_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\,.$$

Для нахождения общего решения уравнения $y'' + py' + qy = 0$ воспользуемся следующей теоремой.

Теорема 3.1. Пусть дано дифференциальное уравнение и его характеристическое уравнение $k^2 + pk + q = 0$.

1) если корни k_1 и k_2 характеристического уравнения $k^2 + pk + q = 0$ – действительные и различные числа ($k_1 \neq k_2$), то все решения уравнения $y'' + py' + qy = 0$ даются формулой:

$$y = C_1\mathrm{e}^{k_1x} + C_2\mathrm{e}^{k_2x},$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

2) если корни k_1 и k_2 характеристического уравнения $k^2 + pk + q = 0$ – действительные и равные числа $k_1 = k_2 = k$, то все решения уравнения $y'' + py' + qy = 0$ даются в виде такой формулы:

$$y = (C_1x + C_2)\mathrm{e}^{kx},$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

3) если же корни k_1 и k_2 характеристического уравнения $k^2 + pk + q = 0$ – комплексные числа, т.е. $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$, то все решения

уравнения $y'' + py' + qy = 0$ даются такой формулой:

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x),$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Все приведенные выше три вида решений представляют собой общие решения ЛОДУ. Частные решения находят по заданным начальным условиям.

Пример 3.7. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 4y' + 3y = 0$.

Решение.

Характеристическое уравнение:

$$k^2 - 4k + 3 = 0$$

имеет корни $k_1 = 1$, $k_2 = 3$. Это действительные и различные числа.

Согласно формуле $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$, общее решение уравнения имеет вид:

$$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{3x}.$$

Пример 3.8. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + 4y' + 4y = 0$.

Решение.

Характеристическое уравнение:

$$k^2 + 4k + 4 = 0$$

имеет корни $k_1 = k_2 = -2$. Это действительные и равные числа.

Согласно формуле $y = (C_1 x + C_2)e^{kx}$, общее решение уравнения имеет вид:

$$y = (C_1 x + C_2)e^{-2x}.$$

Пример 3.9. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 4y' + 13y = 0$.

Решение.

Характеристическое уравнение:

$$k^2 - 4k + 13 = 0$$

имеет корни $k_1 = k_2 = 2 \pm 3i$. Это комплексные числа.

Согласно формуле $y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$, общее решение уравнения имеет вид:

$$y = e^{2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x).$$

§ 3.6. Моделирование задач физико-химического, фармацевтического и медико-биологического содержания с помощью дифференциальных уравнений

Дифференциальные уравнения занимают важное место в решении задач физико-химического и медико-биологического содержания. Пользуясь ими, мы устанавливаем связь между переменными величинами, характеризующими данный процесс или явление.

Прикладные задачи физики

Закон радиоактивного распада атомов

Ядра атомов радиоактивных элементов с течением времени распадаются. Опытным путем установлено, что скорость распада пропорциональна числу нераспавшихся в данный момент ядер атомов. В аналитической форме это можно записать так:

$$dN = -\lambda N\,dt,$$

где N – число нераспавшихся в данный момент ядер атомов; t – время; λ – постоянная распада. Данное уравнение является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными. Знак минус берется потому, что с течением времени число нераспавшихся атомов уменьшается, а производная убывающей функции отрицательна. Скорость же по смыслу – положительная величина.

Установим зависимость числа нераспавшихся ядер атомов радиоактивного вещества от времени, если при $t = 0$ число нераспавшихся ядер атомов $N = N_0$.

Разделим переменные в уравнении $dN = -\lambda N\,dt$ и проинтегрируем левую часть по N, а правую – по t:

$$\frac{dN}{N} = -\lambda\,dt;$$

$$\int\frac{dN}{N} = -\int\lambda\,dt;$$

$$\ln N = -\lambda t + \ln C;$$

$$\ln N = \ln e^{-\lambda t} + \ln C; \qquad N = Ce^{-\lambda t}.$$

Полагая в последнем уравнении $t = 0$ и $N = N_0$, находим $C = N_0$.

Тогда $N = N_0 e^{-\lambda t}$.

Формула $N = N_0 e^{-\lambda t}$ представляет закон радиоактивного распада, выраженный экспоненциальной функцией в интегральной форме. График закона радиоактивного распада $N = N_0 e^{-\lambda t}$ приведен на рис 3.1:

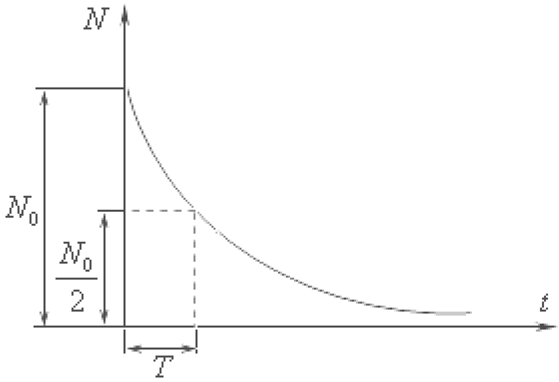


Рис.3.1

Из формулы $N = N_0 e^{-\lambda t}$ можно определить период полураспада T, т. е. время, в течение которого число ядер атомов уменьшается вдвое. Положив в формуле $N = N_0 e^{-\lambda t}$, $t = T$ и $N = \dfrac{N_0}{2}$, получим:

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda T}; \qquad \frac{1}{2} = e^{-\lambda T}.$$

Прологарифмируем последнее выражение: $\ln\dfrac{1}{2} = -\lambda T$, откуда

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda} \approx \frac{0{,}693}{\lambda}.$$

Из формулы $T = \dfrac{\ln 2}{\lambda}$ видно, что период полураспада связан с постоянной распада и является характеристикой данного радиоактивного вещества. Например, для радона $\lambda = 2{,}084 \cdot 10^{-6} c^{-1}$. Подставив ее значение в формулу $T = \dfrac{\ln 2}{\lambda}$, получим период полураспада радона $T = 3{,}15$ суток.

Пример 3.10. Скорость распада радия в каждый момент пропорциональна его начальной массе. Найти закон распада радия, если известно, что в начальный момент $t = 0$ имелось m_0 грамм радия и период полураспада радия (период времени, по истечении которого распадается половина наличной массы радия) равен 1590 лет.

Решение.

Пусть в момент времени t масса радия составляет x грамм, тогда скорость распада радия равна:

$$\frac{d(m_0 - x)}{dt} = -\frac{dx}{dt}.$$

По условию задачи

$$-\frac{dx}{dt} = \lambda x,$$

где k – коэффициент пропорциональности. Разделяя переменные и интегрируя последнее уравнение, получаем:

$$\frac{dx}{x} = -\lambda\, dt, \qquad \ln x = -\lambda t + \ln C,$$

что после потенцирования дает:

$$x = C\mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

Для определения C используем начальное условие: при $t = 0$ $x = m_0$.

Имеем: $C = m_0$ и, значит, $x = m_0\mathrm{e}^{-\lambda t}$.

Коэффициент пропорциональности λ определяем из дополнительного условия: при $t = 1590$ $x = \dfrac{m_0}{2}$.

Имеем: $\dfrac{m_0}{2} = m_0\mathrm{e}^{-1590\lambda}$ или $\mathrm{e}^{1590\lambda} = 2$ и, следовательно, $\mathrm{e}^{\lambda} = 2^{\frac{1}{1590}}$.

Поэтому искомая функция $x = m_0 2^{\frac{-t}{1590}}$.

Закон охлаждения тела

Согласно закону Ньютона, скорость охлаждения тела пропорциональна разности между температурами тела и окружающей среды. Пусть тело нагрето до температуры T_0, температуру окружающей среды будем считать постоянной и равной T_c, $T_c < T_0$. В момент времени t температура тела равна T. Скорость изменения температуры $\dfrac{dT}{dt}$ пропорциональна разности $T - T_c$, т.е.

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_c).$$

Минус означает что с возрастанием времени t температура T тела уменьшается. Производная убывающей функции отрицательна, а скорость по смыслу – положительная величина. Коэффициент пропорциональности k зависит как от физических свойств тела, так и от его геометрической формы.

Разделяя переменные и интегрируя последнее уравнение, получаем:

$$\frac{dT}{T - T_c} = -k\, dt, \qquad \int \frac{dT}{T - T_c} = -\int k\, dt,$$

$$\ln|T - T_c| = -kt + \ln|C|, \qquad \ln|T - T_c| = \ln \mathrm{e}^{-kt} + \ln|C|,$$

$$T - T_c = C\mathrm{e}^{-kt}, \qquad T = T_c + C\mathrm{e}^{-kt}.$$

Подставив начальные условия $t = 0$, $T = T_0$, найдем значение C:

$$T_0 = T_c + C\mathrm{e}^{-k\cdot 0}, \qquad C = T_0 - T_c.$$

Тогда $T = T_c + (T_0 - T_c)\mathrm{e}^{-kt}$.

Полученное уравнение выражает закон охлаждения тела с течением времени в интегральной форме.

Пример 3.11. Скорость охлаждения тела в воздухе пропорциональна разности между температурой тела и температурой воздуха. Температура воздуха равна 20°С. Известно, что в течение 20 мин тело охлаждается от 100 до 60°С. Определить закон изменения температуры T тела в зависимости от времени t.

Решение.

Согласно условию задачи имеем:

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 20),$$

где k – коэффициент пропорциональности. Разделяя переменные и интегрируя, получаем:

$$\frac{dT}{T-20} = k\,dt, \qquad \int \frac{dT}{T-20} = \int k\,dt, \qquad \ln(T-20) = kt + \ln C,$$

что после потенцирования дает:

$$T - 20 = C\mathrm{e}^{kt}$$

и, следовательно,

$$T = 20 + C\mathrm{e}^{kt}.$$

Для определения C используем начальное условие: при $t = 0$, $T = 100$. Отсюда $100 = 20 + C\mathrm{e}^{k\cdot 0}$, $C = 80$. Поэтому $T = 20 + 80\mathrm{e}^{kt}$.

Коэффициент пропорциональности k определяем из дополнительного условия: при $t = 20$, $T = 60$. Отсюда $60 = 20 + 80\mathrm{e}^{20k}$ или $\mathrm{e}^{20k} = \dfrac{1}{2}$ и, следовательно, $\mathrm{e}^{k} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{20}}$.

Таким образом, искомая функция $T = 20 + 80\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}}$.

Закон поглощения света Бугера – Ламберта – Бера

Пусть через слой раствора толщиной x проходит пучок параллельных лучей света (рис. 3.2). Выделим в растворе тонкий слой толщиной dx, ограниченный параллельными поверхностями, перпендикулярными к направлению распространения света. Интенсивность света, прошедшего через слой dx, изменится на величину dI.

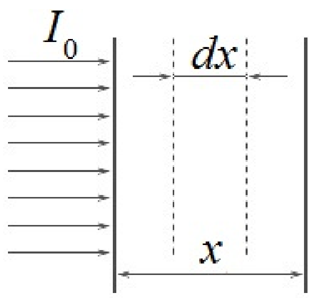


Рис. 3.2

Изменение интенсивности света пропорционально интенсивности света *I*, концентрации вещества *c* и его толщине dx:

$$dI = -kIc\,dx.$$

Коэффициент k зависит от свойств поглощающего вещества и носит название коэффициента поглощения. Постоянство коэффициента k указывает на то, что в каждом слое поглощается одна и та же доля интенсивности света, дошедшего до слоя. Коэффициент k зависит от длины волны света, от свойств растворителя и температуры. Уравнение $dI = -kIc\,dx$ является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными. Разделим переменные и проинтегрируем его:

$$\frac{dI}{I} = -kc\,dx;$$

$$\int \frac{dI}{I} = -\int kc\,dx;$$

$$\ln I = -kcx + \ln C_1;$$

$$\ln I = \ln \mathrm{e}^{-kcx} + \ln C_1.$$

Потенцируя, получим $I = C_1 \mathrm{e}^{-kcx}$.

Постоянную C_1 найдем из начальных условий: при $x = 0$, $I = I_0$:

$$I_0 = C_1 \mathrm{e}^{-kc\cdot 0}, \text{ откуда } C_1 = I_0 \text{ и } I = I_0 \mathrm{e}^{-kcx}.$$

Из формулы $I = I_0 \mathrm{e}^{-kcx}$ найдем величину оптической плотности раствора *D*:

$$D = \lg\frac{I_0}{I} = kcx \cdot \lg \mathrm{e} = kcx \cdot 0,4343,$$

где, $\varepsilon = 0{,}4343k$ носит название молярного коэффициента поглощения, и поэтому $D = \varepsilon cx = \lg\frac{I_0}{I}$.

Преобразовав последнее выражение, получим $I = I_0 10^{-\varepsilon cx}$.

Выражение $I = I_0 10^{-\varepsilon cx}$ представляет собой объединенный закон Бугера – Ламберта – Бера в интегральной форме.

Закон поглощения ионизирующих излучений веществом

На опыте установлено, что ослабление интенсивности излучения dI при прохождении его через слой вещества толщиной dx пропорционально интенсивности I излучения:

$$dI = -\mu I\, dx,$$

где μ – коэффициент поглощения вещества.

Разделяя переменные и интегрируя данное уравнение, имеем:

$$\frac{dI}{I} = -\mu\, dx; \qquad \int \frac{dI}{I} = -\int \mu\, dx;$$

$$\ln I = -\mu x + \ln C; \qquad \ln I = \ln e^{-\mu x} + \ln C.$$

Потенцируя последнее выражение, получим $I = Ce^{-\mu x}$.

Исходя из начальных условий: при $x = 0$, $I = I_0$, $C = I_0$ найдем

$$I = I_0 e^{-\mu x}.$$

Из формулы $I = I_0 e^{-\mu x}$ видно, что интенсивность поглощения изменяется с толщиной поглощающего слоя по экспоненциальному закону.

Прикладные задачи химии

Химическая кинетика занимается изучением механизма процесса и определением скорости, при которой система достигает равновесия. При определении скорости протекания процесса важно учесть влияние на нее таких факторов, как концентрация, температура, природа растворителя, присутствие катализатора.

В общем случае скорость химической реакции зависит от концентрации реагирующих веществ. Однако скорость реакции может зависеть также от концентрации других веществ не входящих в стехиометрическое уравнение. Уравнение, выражающее зависимость скорости реакции от концентрации каждого вещества, влияющего на скорость, называется кинетическим дифференциальным уравнением реакции. Рассмотрим химические процессы первого, второго и третьего порядка.

Закон реакции первого порядка

Если a – начальная концентрация реагирующего вещества, x – количество молей на литр, прореагировавших за время t от начала реакции, то скорость реакции $\frac{dx}{dt}$, а действующая масса к этому моменту $a - x$. Согласно закону действующих масс

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x),$$

где k – коэффициент пропорциональности (константа скорости), зависящий от рода и условий химического процесса. Разделяя в данном уравнении переменные и затем, интегрируя, получаем:

$$\frac{dx}{a-x} = k\,dt, \qquad \int \frac{dx}{a-x} = \int k\,dt, \qquad -\ln(a-x) + \ln C = kt$$

или

$$\ln \frac{C}{a-x} = kt.$$

Для определения C используем начальное условие: $t=0$, $x=0$.

Имеем $\ln \dfrac{C}{a-0} = k \cdot 0$, $C = a$, и, значит,

$$\ln \frac{a}{a-x} = kt,$$

откуда: $\dfrac{a}{a-x} = \mathrm{e}^{kt}$ или $a - x = a\mathrm{e}^{-kt}$

$$x = a(1-\mathrm{e}^{-kt}).$$

Пример 3.12. Радиоактивный элемент RaB распадается наполовину, образуя радиоактивный элемент RaC, в течение 26,7 мин. Найти время распада 0,2 первоначального количества RaB.

Решение.

Здесь имеет место реакция первого порядка: Ra$B \to$ RaC. Поэтому согласно дифференциальному уравнению реакции первого порядка

$$\frac{dx}{dt} = k(a-x)$$

и, значит,

$$\ln \frac{a}{a-x} = kt,$$

откуда:

$$t = \frac{1}{k} \ln \frac{a}{a-x}.$$

Коэффициент k определяем из дополнительного условия при $t = 26{,}7$ минут $x = \dfrac{a}{2}$. Имеем:

$$26{,}7 = \frac{1}{k} \ln \frac{a}{a - \frac{a}{2}} = \frac{1}{k} \ln 2 \qquad \text{или} \qquad k = \frac{\ln 2}{26{,}7}.$$

Тогда искомое время

$$t = \frac{26{,}7}{\ln 2} \ln \frac{a}{a - 0{,}2a} = \frac{26{,}7}{\ln 2} \ln \frac{1}{0{,}8} = \frac{26{,}7}{\ln 2} \ln \frac{5}{4} \approx 8{,}6 \text{ (мин)}.$$

Пример 3.13. Вещество *A* превращается в вещество *B*. Спустя 1 час после начала реакции осталось 44,8 г вещества *A*, а после 3 часов 11,2 г вещества. Определить первоначальное количество вещества *A* и время, когда останется половина этого вещества.

Решение.

Здесь имеет место реакция первого порядка. Поэтому дифференциальное уравнение реакции

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x),$$

и, значит, как установлено выше,

$$x = a(1 - \mathrm{e}^{-kt}).$$

Используя дополнительные условия (при $t = 1 \quad x = a - 44{,}8$, при $t = 3 \quad x = a - 11{,}2$), имеем:

$$\begin{aligned} a - 44{,}8 &= a(1 - \mathrm{e}^{-k}), \\ a - 11{,}2 &= a(1 - \mathrm{e}^{-3k}) \end{aligned} \qquad \text{или} \qquad \begin{cases} 44{,}8 = a\,\mathrm{e}^{-k}, \\ 11{,}2 = a\,\mathrm{e}^{-3k}. \end{cases}$$

Из последней системы находим: $\mathrm{e}^{-k} = 2^{-1}$, $\quad a = 89{,}6$ г. Теперь находим искомое время. Имеем:

$$\frac{a}{2} = a(1 - 2^{-t}), \qquad \frac{1}{2} = 2^{-t}, \qquad 2^{-1} = 2^{-t},$$

следовательно, $t = 1$ ч.

Закон реакции второго порядка

Пусть a и b – начальные концентрации веществ *A* и *B*, x – число прореагировавших к моменту t молей вещества *A*, а следовательно, и вещества *B*, так как каждый моль вещества *A* соединяется с веществом *B*, и поэтому число прореагировавших молей обоих веществ одинаково. В момент t скорость реакции $\frac{dx}{dt}$. Действующая масса вещества *A* равна $a - x$, действующая масса вещества *B* будет $b - x$. Согласно закону действующих масс

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x)(b - x),$$

где k – коэффициент пропорциональности. Разделяя переменные и интегрируя, получим:

$$\int \frac{dx}{(a - x)(b - x)} = k\int dt + C.$$

Если $a=b$, то имеем: $\frac{1}{a-x}=kt+C$. Так как при $t=0$ $x=0$, то $C=\frac{1}{a}$ и поэтому

$$x=a-\frac{a}{1+akt}.$$

Если $a\neq b$, то имеем:

$$\frac{1}{b-a}\ln\frac{b-x}{a-x}=kt+C.$$

Так как при $t=0$ $x=0$, то $C=\frac{1}{b-a}\ln\frac{b}{a}$ и поэтому

$$\frac{1}{b-a}\ln\frac{b-x}{a-x}=kt+\frac{1}{b-a}\ln\frac{b}{a} \quad \text{или} \quad kt=\frac{1}{b-a}\ln\frac{a(b-x)}{b(a-x)},$$

откуда

$$\frac{b-x}{a-x}=\frac{b}{a}\mathrm{e}^{(b-a)kt} \quad \text{и} \quad x=\frac{ab(\mathrm{e}^{(b-a)kt}-1)}{b\cdot\mathrm{e}^{(b-a)kt-a}}.$$

Пример 3.14. В реакции омыления уксусноэтилового эфира гидроксидом натрия

$$\underset{\text{уксусноэтиловый эфир}}{CH_3COOC_2H_5}+\underset{\text{гидроксид натрия}}{NaOH}\rightarrow\underset{\text{ацетат натрия}}{CH_3COONa}+\underset{\text{этиловый спирт}}{C_2H_5OH}$$

первоначальные концентрации уксусноэтилового эфира и гидроксила натрия соответственно $a=0{,}01$ и $b=0{,}002$. Спустя 23 минуты концентрация уксусноэтилового эфира уменьшилась на 10%. За какое время она уменьшится на 15%?

Решение.

Здесь имеет место реакция второго порядка. Поэтому дифференциальное уравнение реакции

$$\frac{dx}{dt}=k(a-x)(b-x)$$

и, значит, как установлено выше,

$$kt=\frac{1}{b-a}\ln\frac{a(b-x)}{b(a-x)}.$$

Коэффициент пропорциональности k определим из дополнительного условия: при $t=23$ мин $x=0{,}01\cdot0{,}1=0{,}001$. Имеем:

$$23k=\frac{1}{0{,}002-0{,}01}\ln\frac{0{,}01(0{,}002-0{,}001)}{0{,}002(0{,}01-0{,}001)} \quad \text{или} \quad k=\frac{125}{23}\ln1{,}8.$$

Теперь находим искомое время. Имеем:

$$\frac{125}{23}\ln 1{,}8\cdot t=\frac{1}{0{,}002-0{,}01}\ln\frac{0{,}01(0{,}002-0{,}0015)}{0{,}002(0{,}01-0{,}0015)}$$

или

$$t=23\frac{\ln 3{,}4}{\ln 1{,}8}\approx 47{,}9\quad (\textit{мин}).$$

Прикладные задачи фармации, биологии и медицины

Закон размножения бактерий с течением времени

Скорость размножения некоторых бактерий пропорциональна количеству бактерий в данный момент. Найти зависимость изменения количества бактерий от времени.

Обозначим количество бактерий, имеющихся в данный момент, через x. Тогда

$$\frac{dx}{dt}=kx,$$

где k – коэффициент пропорциональности.

В уравнении $\frac{dx}{dt}=kx$ разделим переменные и проинтегрируем его:

$$\frac{dx}{x}=k\,dt;\qquad \int\frac{dx}{x}=k\int dt;$$

$$\ln|x|=kt+\ln|C|;\qquad \ln|x|=\ln e^{kt}+\ln|C|.$$

Потенцируем последнее выражение: $x=Ce^{kt}$. Полагая, что при $t=0$ и $x=x_0$, получим $C=x_0$. Следовательно, $x=x_0e^{kt}$.

Уравнение $x=x_0e^{kt}$ выражает закон размножения бактерий с течением времени. Таким образом, при благоприятных условиях увеличение бактерий с течением времени происходит по экспоненциальному закону.

Этот закон представляет интерес не только с теоретической, но и с практической точки зрения. Он говорит о том, что создавая для полезной популяции благоприятные условия, можно очень быстро получить популяцию с большой численностью. Весьма показательна в этом смысле история с пенициллином. Когда был открыт этот антибиотик, грибки, его выделяющие, стали выращивать в наилучших условиях. Их неограниченно подкармливали, следили, чтобы им не было тесно, и, конечно, оберегали от вредных видов. Будущий урожай можно было совершенно точно подсчитать по формуле. Размножаясь в соответствии с экспоненциальным законом, пенициллиновые грибки в короткий срок обеспечили весь мир ценным лекарством.

Экспоненциальному закону размножения подчиняется так называемый «экологический взрыв», когда тот или иной биологический вид, попав в благоприятные условия, за короткий срок достигает большой численности. Для примера можно *указать на губительные нашествия полчищ насекомых (саранчи, шелкопряда и др.) или на неожиданные последствия акклиматизации кроликов в Австралии.*

Пример 3.15. Скорость размножения бактерий пропорциональна их количеству. В начальный момент $t=0$ имелось 100 бактерий, а в течение 3 часов их число удвоилось. Найти зависимость количества бактерий от времени. Во сколько раз увеличится количество бактерий за 9 часов?

Решение.

Пусть x – количество бактерий, имеющихся в данный момент, тогда согласно условию дифференциальное уравнение задачи:

$$\frac{dx}{dt}=kx,$$

где k – коэффициент пропорциональности. Решая данное дифференциальное уравнение, получаем

$$x=Ce^{kt}.$$

Для определения C используем начальное условие: при $t=0$ $x=100$. Имеем $100=Ce^{k\cdot 0}$, $C=100$, и, значит, $x=100e^{kt}$.

Коэффициент пропорциональности k определяем из дополнительного условия: при $t=3$ $x=200$. Имеем: $200=100e^{3k}$ или $2=e^{3k}$, и, следовательно, $e^{k}=2^{\frac{1}{3}}$. Поэтому искомая функция

$$x=100\cdot 2^{\frac{t}{3}},$$

откуда при $t=9$ $x=100\cdot 2^{\frac{9}{3}}=100\cdot 2^{3}=800$. Следовательно, в течение 9 часов количество бактерий увеличится в 8 раз.

Закон роста клеток с течением времени

Для палочковидных клеток, у которых отношение поверхности клетки к ее объему сохраняется постоянным, скорость роста клетки $\frac{dl}{dt}$ пропорциональна длине клетки l в данный момент:

$$\frac{dl}{dt}=(\alpha-\beta)l,$$

где α и β – постоянные, характеризующие процессы синтеза и распада.

В уравнении $\frac{dl}{dt}=(\alpha-\beta)l$ разделим переменные и проинтегрируем его:

$$\frac{dl}{l} = (\alpha - \beta)\,dt\,; \quad \int \frac{dl}{l} = \int (\alpha - \beta)\,dt\,; \quad \ln|l| = (\alpha - \beta)t + \ln|C|\,;$$

$$\ln|l| = \ln e^{(\alpha-\beta)t} + \ln|C|\,; \quad l = Ce^{(\alpha-\beta)t}\,.$$

При $t = 0$ и $l = l_0$, получим $C = l_0$. Следовательно, $l = l_0 e^{(\alpha-\beta)t}$, т.е. рост палочковидных клеток происходит по экспоненциальному закону.

Закон разрушения клеток в звуковом поле

Ультразвуковые колебания, распространяясь в суспензии бактериальных клеток, водорослей или эритроцитов создают в жидкой дисперсионной среде переменное давление. При отрицательном давлении (разрежение) в интенсивном ультразвуковом поле происходит разрыв жидкости и образование микрополостей, пузырьков или каверн (кавитация). Во время полупериода сжатия кавитационные пузырьки захлопываются, возникает ударная волна, которая разрушает клетки.

В очень широком диапазоне частот относительные скорости разрушения биологических клеток различных видов остаются постоянными. Эти скорости могут характеризовать относительную прочность клеток различных видов. Чтобы выразить это количественно, нужно определить скорость разрушения клетки в постоянном звуковом поле. Изучение этого вопроса показывает, что, пока по крайней мере 1% популяции остается неразрушенным, можно написать, что:

$$\frac{dN}{dt} = -RN\,,$$

где N – концентрация клеток; t – время; R – постоянная.

Разделим в уравнении $\frac{dN}{dt} = -RN$ переменные и проинтегрируем его:

$$\frac{dN}{N} = -R\,dt\,; \quad \int \frac{dN}{N} = -\int R\,dt\,; \quad \ln|N| = -Rt + \ln|C|\,;$$

$$\ln|N| = \ln e^{-Rt} + \ln|C|\,; \quad N = Ce^{-Rt}\,.$$

Постоянную C найдем из условия, что при $t = 0$ и $N = N_0$, получим $C = N_0$.

Тогда $N = N_0 e^{-Rt}$, т.е. разрушение клеток в постоянном звуковом поле происходит по экспоненциальному закону.

Вопросы для самоконтроля

1. Какие уравнения называются дифференциальными?

2. Дайте определение обыкновенному дифференциальному уравнению. Приведите примеры таких уравнений.
3. Какое дифференциальное уравнение называется уравнением в частных производных? Приведите примеры таких уравнений.
4. Что называется порядком дифференциального уравнения? Приведите примеры.
5. Что называется решением дифференциального уравнения?
6. Что называется общим решением дифференциального уравнения?
7. Что называется частным решением дифференциального уравнения?
8. Как от общего решения дифференциального уравнения перейти к его частному решению?
9. В чём заключается задача Коши?
10. Какие дифференциальные уравнения называются уравнениями с разделяющимися переменными?
11. Сформулируйте правила решения дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными.
12. Какие дифференциальные уравнения называются однородными дифференциальными уравнениями первого порядка? Приведите примеры таких уравнений.
13. Какие уравнения относятся к дифференциальным уравнениям второго порядка, допускающие понижение порядка? Приведите примеры таких уравнений.
14. Дайте определение дифференциальным уравнениям второго порядка, не содержащим искомой функции и её производной. Приведите примеры.
15. Дайте определение дифференциальным уравнениям второго порядка, не содержащим искомой функции. Приведите примеры.
16. Дайте определение дифференциальным уравнениям второго порядка, не содержащим аргумента. Приведите примеры.
17. Что называется линейным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами? Запишите соответствующую формулу.
18. Какие дифференциальные уравнения называются линейными однородными дифференциальными уравнениями второго порядка с постоянными коэффициентами? Приведите примеры таких уравнений.
19. Что называется характеристическим уравнением? Запишите формулу.
20. Назовите виды решений характеристического уравнения в зависимости от значений его корней. Дайте пояснения по каждому из видов.
21. В чём заключается закон радиоактивного распада.
22. Запишите формулу для закона поглощения света. Дайте пояснения по каждому составляющему данной формулы.
23. Запишите формулу для закона поглощения ионизирующих излуче-

ний веществом. Дайте пояснения по каждому составляющему данной формулы.
24. Перечислите прикладные законы химии, в которых используется теория дифференциальных уравнений. Дайте пояснению по каждому из законов.
25. Перечислите основные задачи фармации, биологии, медицины в которых используется теория дифференциальных уравнений. Дайте соответствующие пояснения по каждой из задач.

Задания для решения

Выяснить, являются ли решением данных дифференциальных уравнений указанные функции?

1. $y'' + y + 2\sin x = 1,$ $\quad y = x\cos x + 1;$
2. $y'' - x \cdot y''' = 0,$ $\quad y = \dfrac{x^3}{3} - x;$
3. $x \cdot y' \cdot \ln x = x - y,$ $\quad y = \dfrac{x}{\ln x};$
4. $y'' - y' + y = e^x \sin x,$ $\quad y = e^x \cos x;$
5. $y' \cdot y''' - x \cdot y'' + 1 = 0,$ $\quad y = \dfrac{x^3}{3} - x;$
6. $x \cdot y' - \dfrac{y}{2} = x \cdot y \cdot \ln 2,$ $\quad y = 2^{x\sqrt{x}};$
7. $y' + \dfrac{y''}{2} - y = 0,$ $\quad y = e^x \cos x;$
8. $y\sin x + y''(x+1) = 0,$ $\quad y = x + \sin x.$

Найти общие и частные решения дифференциальных уравнений первого порядка с разделяющимися переменными:

9. $y' \cdot y = x - 2,$ если $y = 1$ при $x = 0;$
10. $y' = \dfrac{y}{x+3},$ если $y = e$ при $x = -2;$
11. $4x\,dy - 3y\,dx = 0,$ если $y = e$ при $x = 1;$
12. $y' = \cos^2 y,$ если $y = \pi/4$ при $x = 0;$
13. $y' = \sqrt{2y+3},$ если $y = 1/2$ при $x = 0;$
14. $y' \cdot y^2 - (y^3 - 2)^2 = 0,$ если $y = 1$ при $x = 0;$
15. $y\,dy - \ln x\,dx = 0,$ если $y = 0$ при $x = 1;$

16. $(x-1)\,dy - 2y\,dx = 0$, если $y = e^2$ при $x = 2$.

Найти общие решения однородных дифференциальных уравнений первого порядка:

17. $2xyy' = y^2 - 4x^2$;
18. $x\,dy - y\,dx = x\,dx$;
19. $y^2 - 4xy + 4x^2y' = 0$;
20. $xy + y^2 = (2x^2 + xy)y'$;
21. $xy\,dx - (x^2 + y^2)\,dy = 0$;
22. $xy' = y - xe^{y/x}$;
23. $x^2 - y^2 + 2xyy' = 0$;
24. $(x-y)\,dx + (x+y)\,dy = 0$.

Найти общие решения дифференциальных уравнений второго порядка, допускающих понижение порядка:

25. $y'' = \sin x$;
26. $y'' = \sin x \cos x$;
27. $y'' = xe^{-x}$;
28. $xy'' - y' = 0$;
29. $(1+x^2)y'' + 2xy' = 0$;
30. $(1-x^2)y'' - xy' = 2$;
31. $y^3 y'' = 1$;
32. $yy'' - (y')^2 = 0$.

Найти общие и, где указано, частные решения линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка:

33. $y'' + 2y' + 2y = 0$;
34. $y'' + y' + y = 0$;
35. $y'' - 6y' + 8y = 0$;
36. $y'' - 7y' + 10y = 0$;
37. $y'' - 4y' + 5y = 0$;
38. $y'' - y = 0$;
39. $y'' - 6y' + 8y = 0$ при $x = 0$, $y = 0$, $y' = 1$;
40. $y'' - 2y' + y = 0$ при $x = 1$, $y = 0$, $y' = e$.

41. Скорость укорочения мышцы описывается уравнением $\frac{dx}{dt} = B(x_0 - x)$, где x_0 – полное укорочение мышцы; B – постоянная, зависящая от нагрузки; x – укорочение мышцы в данный момент. Найти закон сокращения мышцы, если в момент времени $t = 0$ величина укорочения мышцы была равно 0.

42. В ультрацентрифугах скорость смещения молекул исследуемого полимера в направлении от оси вращения выражается формулой $v = b\omega^2 x$, где b – постоянная величина, характеризующая данный полимер; ω – угловая скорость вращения центрифуги; x – расстояние от оси вращения до движущейся границы оседающего полимера. Найти уравнение движения границы полимера, если в момент времени $t = 0$ она находилась на расстоянии 0,5 см от оси вращения.

43. Если первоначально количество фермента равно 1 г, а через 1 час становится равным 1,2 г, то чему оно будет равно через 5 часов после начала брожения? Скорость приросту фермента считать пропорци-

ональной его наличному количеству.

44. Скорости ферментативных каталитических реакций подчиняются следующему уравнению:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{k(a-x)}{1+k'(a-x)},$$

где x – концентрация продукта в момент времени t; a – начальная концентрация реагента. Найти закон зависимости изменения концентрации продукта от времени.

45. Популяция бактерий увеличивается таким образом, что удельная скорость роста в момент t (час) составляет величину $\frac{1}{1+2t}$. Допустим, что начальной популяции соответствует $x(0) = 1000$. Какой будет популяция после 4 часов роста? После 12 часов?

46. За 30 дней распалось 50% первоначального количества радиоактивного вещества. Через сколько времени останется 1% от первоначального количества?

47. Вычислить период полураспада радия и радона, если постоянные распада данных веществ соответственно равны $1{,}354 \cdot 10^{-11} c^{-1}$ и $2{,}1 \cdot 10^{-6} c^{-1}$.

48. Имеется 1000 относительных единиц радона. Сколько действующих единиц радона останется спустя 1ч? Постоянная распада радона $\lambda = 2{,}1 \cdot 10^{-6} c^{-1}$.

49. Скорость растворения лекарственного вещества в таблетках пропорциональна количеству лекарства в таблетке. Известно, что при $t = 0$, $m = m_0$. Найти закон растворения таблетки (т.е. закон изменения массы), если период полурастворения таблетки T.

50. В культуре дрожжей быстрота прироста дрожжевого фермента пропорциональна количеству, имеющемуся в наличии. В начальный момент $x = x_0$. Если количество удваивается в течение часа, то во сколько раз оно возрастет за 2,5 часа.

51. Известно, что скорость распада радия пропорциональна его конечному количеству и что половина его первоначального количества распадается в течение 1600 лет. Определить какой процент m_0 радия распадется в течение 100 лет, если первоначальное его значение равно m_0.

52. В воде с температурой 30 °С в течение 10 минут тело охлаждается от 100°С до 40 °С. До какой температуры охладится тело за 30 минут, если по закону Ньютона скорость охлаждения пропорциональна разности температур тела и охлаждающей среды?

53. Найдите закон убывания лекарственного препарата в организме человека, если через 1 час после введения 10 мг препарата его масса

уменьшилась вдвое. Какое количество препарата останется в организме после двух часов?

54. Уменьшение интенсивности света при прохождении через поглощающее вещество пропорционально интенсивности падающего света и толщине поглощающего слоя. Найдите закон убывания интенсивности света, если известно, что при прохождении слоя $l = 0{,}5\,м$ интенсивность света убывает в 2 раза.

55. Скорость роста числа микроорганизмов пропорциональна их количеству в данный момент. В начальный момент имелось 100 микроорганизмов, и их число удвоилось за 6 часов. Найти зависимость количества микроорганизмов от времени и количество микроорганизмов через сутки.

ЧАСТЬ II
ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

ГЛАВА IV
СОБЫТИЕ И ВЕРОЯТНОСТЬ

§ 4.1. Основные понятия теории вероятностей

Теория вероятностей – область математики, изучающая закономерности в случайных явлениях. **Случайное явление** – это явление, которое при неоднократном воспроизведении одного и того же опыта может протекать каждый раз несколько по-иному.

Очевидно, что в природе нет ни одного явления, в котором не присутствовали бы в той или иной мере элементы случайности, но в различных ситуациях мы учитываем их по-разному. Так, в ряде практических задач ими можно пренебречь и рассматривать вместо реального явления его упрощенную схему – «модель», предполагая, что в данных условиях опыта явление протекает вполне определенным образом. При этом выделяются самые главные, решающие факторы, характеризующие явление. Именно такая схема изучения явлений чаще всего применяется в физике, технике, механике. Именно так выявляется основная закономерность, свойственная данному явлению и дающая возможность предсказать результат опыта по заданным исходным условиям.

Однако описанная классическая схема так называемых точных наук плохо приспособлена для решения многих задач, в которых многочисленные, тесно переплетающиеся между собой случайные факторы играют заметную (часто определяющую) роль. Здесь на первый план выступает случайная природа явления, которой уже нельзя пренебречь. Это явление необходимо изучать именно с точки зрения закономерностей, присущих ему как случайному явлению. В физике примерами таких явлений служат броуновское движение, радиоактивный распад, ряд квантово-механических процессов и др.

Предмет изучения биологов и медиков – живой организм, зарождение, развитие и существование которого определяется очень многими и разнообразными, часто случайными внешними и внутренними факторами. Именно поэтому явления и события живого мира во многом тоже случайны по своей природе.

Элементы неопределенности, сложности, многопричинности, присущие случайным явлениям, обусловливают необходимость создания специальных математических методов для изучения этих явлений. Разработка таких методов, установление специфических закономерностей, свойственных случайным явлениям, – **главные задачи теории вероятностей.**

Рассмотрим основные понятия теории вероятностей.

Исходным понятием теории вероятностей является испытание.

Испытанием называется осуществление некоторого определенного комплекса условий, который может быть воспроизведен сколь угодно большое число раз.

Организация одних испытаний зависит от нас самих (например, подбрасывание монеты или игрального кубика, извлечение шаров из ящика), организация других – нет (например, простое наблюдение за средней температурой данного дня года, проводимое в течение многих лет).

Каждое испытание может привести или не привести к некоторому исходу, результату. Исход испытания называется **событием**.

Например, стрелок стреляет по мишени, разделенной на четыре области. Выстрел – это испытание. Попадание в определенную область мишени – событие.

Случайным событием называется всякий факт, который в результате опыта (испытания) может произойти или не произойти.

Различные случайные события обозначаются латинскими буквами $A, B, C, \ldots$

Например, событие A – появление герба при бросании монеты; событие B – попадание в цель при выстреле; событие C – появление цветного шара при извлечении шаров из ящика.

Случайные события зависят от многих причин, имеющих между собой отдаленную связь, проследить которую мы не можем. Так, при бросании игрального кубика мы не знаем заранее, какая из граней окажется сверху, так как это зависит от очень многих обстоятельств (движения руки, положения игрального кубика в момент броска, особенностей поверхности, на которую падает кубик, и т. д.).

Виды случайных событий

Пусть производится опыт, который имеет ряд возможных событий (исходов): $A, B, C, \ldots$ и т. д.

События A, B, C называются **единственно возможными**, если в результате каждого испытания хотя бы одно из них обязательно наступит. Говорят также, что рассматриваемые события образуют полную группу событий.

Пример 4.1. При бросании игрального кубика единственно возможные события, состоящие в выпадении одного, двух, трех, четырех, пяти и шести очков, образуют полную группу событий.

Два события называются **несовместными**, если в результате опыта появление одного из них исключает появление другого в одном и том же испытании.

Пример 4.2. В ящике находится пять шаров, помеченных номерами: 1, 2, 3, 4, 5. При извлечении шара вскроется только один из пяти номеров, значит, события, состоящие в появлении этого номера при дальнейшем извлечении шаров из ящика, являются несовместными.

Два события называются **совместными**, если появление одного из них не исключает появление другого в одном и том же испытании.

Пример 4.3. При бросании игрального кубика событие A – появление четырех очков, событие B – появление четного числа очков. В этом случае события A и B совместные.

События называются **равновозможными (равновероятными)**, если при испытании не существует никаких объективных причин, вследствие которых одно из них могло бы наступать чаще, чем другое.

Пример 4.4. Появление герба или решки при бросании монеты – события равновозможные. Но если в ящике находится восемь белых и два черных шара, то появления белого или черного шара не могут быть событиями равновозможными. Они носят название событий неравновозможных.

Единственно возможные, несовместные и равновозможные события называются **случаями.**

Два события A и B называются **противоположными**, если в данном испытании они несовместны и одно из них обязательно происходит. Событие, противоположное событию A, обозначают через $\overline{A}$.

Пример 4.5. Попадание и промах при выстреле по цели – противоположные события. Если A – попадание, то $\overline{A}$ – промах.

Событие называется **достоверным**, если в данном испытании оно является единственно возможным его исходом.

Событие называется **невозможным**, если в данном испытании оно заведомо не может произойти.

Пример 4.6. При извлечении шара из урны, в которой все шары белые, событие A – вынут белый шар – достоверное событие; B – вынут черный шар – невозможное событие.

Заметим, что достоверное и невозможное события в данном испытании являются противоположными.

§ 4.2. Классическое и статистическое определение вероятности

Классическое определение вероятности

Вероятность – одно из основных понятий теории вероятностей. Существует несколько определений этого понятия.

Рассмотрим пример. Пусть в урне содержится 6 одинаковых, тщательно перемешанных шаров, причем 2 из них – красные, 3 – синие и

1 – белый. Очевидно, возможность вынуть наудачу из урны цветной (т.е. красный или синий) шар больше, чем возможность извлечь белый шар. Можно ли охарактеризовать эту возможность числом? Оказывается, можно. Это число и называют вероятностью события (появления цветного шара). Таким образом, вероятность есть число, характеризующее степень возможности появления события.

Поставим перед собой задачу дать количественную оценку возможности того, что взятый наудачу шар цветной. Появление цветного шара будем рассматривать в качестве события A. Каждый из возможных результатов испытания (испытание состоит в извлечении шара из урны) назовем **элементарным исходом (элементарным событием)**. Элементарные исходы обозначим через ω_1, ω_2, ω_3 и т. д. В нашем примере возможны следующие 6 элементарных исходов: ω_1 – появился белый шар; ω_2, ω_3 – появился красный шар; ω_4, ω_5, ω_6 – появился синий шар.

Те элементарные исходы, в которых интересующее нас событие наступает, назовем **благоприятствующими** этому событию. В нашем примере благоприятствуют событию A (появлению цветного шара) следующие 5 исходов: ω_2, ω_3, ω_4, ω_5, ω_6.

Таким образом, событие A наблюдается, если в испытании наступает один, безразлично какой, из элементарных исходов, благоприятствующих A; в нашем примере A наблюдается, если наступит ω_2 или ω_3 или ω_4, или ω_5 или ω_6.

Отношение числа благоприятствующих событию A элементарных исходов к их общему числу называют **вероятностью события** $\boldsymbol{A}$ и обозначают через $P(A)$. В рассматриваемом примере всего элементарных исходов 6; из них 5 благоприятствуют событию A. Следовательно, вероятность того, что взятый шар окажется цветным, равна $P(A)=\frac{5}{6}$. Это число и дает ту количественную оценку степени возможности появления цветного шара, которую мы хотели найти. Дадим теперь определение вероятности.

Вероятностью события $\boldsymbol{A}$ называют отношение числа благоприятствующих этому событию исходов к общему числу всех равновозможных несовместных элементарных исходов, образующих полную группу. Итак, вероятность события A определяется формулой

$$P(A)=\frac{m}{n},$$

где m – число случаев благоприятствующих появлению события A; n – общее число всех равновозможных случаев.

Здесь предполагается, что элементарные исходы несовместны, равновозможны и образуют полную группу.

Пример 4.7. У кабинета дежурного психотерапевта ожидают приема трое больных. Врачу известно по медицинским карточкам, что один из ожидающих, по фамилии Петров, болел в прошлом маниакально-депрессивным психозом. Врач интересуется этим больным, но не хочет вне очереди вызывать его в кабинет.

Обозначим как событие A тот факт, что в кабинет врача входит больной Петров; как событие B обозначим то, что входит другой больной – Сидоров и как событие C – входит Иванов. События A, B и C – несовместные и образуют полную группу (предполагается, что к врачу больные входят по одному). Так как появиться согласно очереди может равновероятно любой из больных, то до начала приема вероятность появиться первым в кабинете врача для одного из больных, в том числе и для Петрова, равна $\frac{1}{3}$.

Пример 4.8. Набирая номер телефона, абонент забыл одну цифру и набрал ее наудачу. Найдем вероятность того, что набрана нужная цифра.

Решение.

Обозначим через A событие – набрана нужная цифра. Абонент мог набрать любую из 10 цифр, поэтому общее число возможных элементарных исходов равно 10. Эти исходы несовместны, равновозможны и образуют полную группу. Благоприятствует событию A лишь один исход (нужная цифра лишь одна). Искомая вероятность равна отношению числа исходов, благоприятствующих событию, к числу всех элементарных исходов

$$P(A) = \frac{1}{10}.$$

Из приведенного классического определения вероятности вытекают следующие ее свойства:

Свойство 1. Вероятность достоверного события U равна единице.

Действительно, достоверному событию должны благоприятствовать все n элементарных событий, т.е. $m = n$, следовательно,

$$P(U) = \frac{n}{n} = 1$$

Свойство 2. Вероятность невозможного события V равна нулю.

В самом деле, невозможному событию не может благоприятствовать ни одно из элементарных событий, т. е. $m = 0$, откуда:

$$P(V) = \frac{0}{n} = 0.$$

Свойство 3. Вероятность случайного события есть положительное число, заключенное между нулем и единицей.

Действительно, случайному событию благоприятствует лишь часть из общего числа элементарных событий. Поэтому в этом случае $0 < m < n$ и, значит, $0 < \frac{m}{n} < 1$. Следовательно $0 < P(A) < 1$.

Итак, вероятность любого события удовлетворяет двойному неравенству:

$$0 \le P(A) \le 1.$$

Статистическое определение вероятности

При рассмотрении классического определения вероятности предполагалось, что случайные события равновозможны. Обычно о равновозможности случайных событий судят исходя из соображений симметрии. Например, при бросании игрального кубика предполагают, что он имеет форму правильного куба. Однако таких задач на практике встречается очень мало. Поэтому в естественнонаучных и технических вопросах пользуются так называемым статистическим определением вероятности.

Отметим, что теория вероятностей применима только к массовым (не уникальным) случайным явлениям. Практика показывает, что массовые случайные явления обладают свойством устойчивости частоты их появления – отношения числа появлений случайного события к числу испытаний. Примером может служить выпадение герба или цифры при бросании монеты, которое является простым и наглядным испытанием. Практика человека говорит о том, что при большом числе бросаний примерно в 50% испытаний выпадет герб, а в 50% – цифра. А это уже определенная закономерность. Здесь нас интересует не результат отдельного подбрасывания, а то, что получится после многократных подбрасываний. Этот простой эксперимент может служить моделью для решения других задач. Устойчивость частоты случайного события – это объективное свойство массовых случайных событий реального мира. Отсутствие устойчивости частоты в сериях испытаний свидетельствует о том, что условия испытаний изменяются.

Допустим, что имеется возможность неограниченного повторения испытаний, в каждом из которых при сохранении неизменных условий отмечается появление или непоявление некоторого события A (бросание монеты, извлечение шара из урны, стрельба по цели).

Пусть при достаточно большом числе n испытаний интересующее нас событие A произошло m раз.

Число m называется **абсолютной частотой** (или просто частотой) события A, а отношение

$$P^*(A)=\frac{m}{n}$$

называется **относительной частотой события** A в данной серии испытаний.

Результаты многочисленных опытов и наблюдений помогают заключить: при проведении серий из n испытаний, когда число n сравнительно мало, относительная частота $P^*(A)$ принимает значения, которые могут довольно сильно отличаться друг от друга. Но с увеличением $P^*(A)$ – числа испытаний в сериях – относительная частота $P^*(A)$ приближается к некоторому числу $P(A)$, стабилизируясь возле него и принимая все более устойчивые значения.

Статистическое определение вероятности: вероятностью события A в данном испытании называется число $P(A)$, около которого группируются значения относительной частоты при больших n.

Несмотря на внешнее сходство, формулы $P(A)=\frac{m}{n}$ и $P^*(A)=\frac{m}{n}$ различны по существу. Первая формула служит для теоретического вычисления вероятности события по заданным условиям опыта. Вторая же – для экспериментального определения частоты события. Чтобы ею воспользоваться, необходим опытный, статистический материал.

Между частотой события и его вероятностью существует некоторая связь: ясно, что более вероятные события происходят чаще, чем маловероятные.

Практически невозможным событием называется событие, вероятность которого весьма близка к нулю, но не равна нулю.

Практически достоверным называется событие, вероятность которого весьма близка к единице, но не равна единице.

С данными понятиями связывается **принцип практической уверенности**, который формулируется следующим образом: если в некотором испытании вероятность случайного события A достаточно близка к единице, то можно быть практически уверенным в том, что при однократном испытании событие A произойдет. Если в некотором испытании вероятность случайного события A достаточно близка к нулю, то можно быть практически уверенным в том, что при однократном испытании событие A не произойдет.

§ 4.3. Теоремы теории вероятностей

Теорема сложения вероятностей несовместных событий

Суммой или **объединением** двух событий A и B называется событие C, состоящее в наступлении по крайней мере одного из событий Aили B.

Сумма событий обозначается как $C = A + B$ или $C = A \cup B$.

Суммой любого числа событий $A_1, A_2, ..., A_n$ называется событие C, которое состоит в осуществлении хотя бы одного из этих событий.

Например, если из орудия произведены два выстрела и A – попадание при первом выстреле, B – попадание при втором выстреле, то $A + B$ – попадание при первом выстреле, или при втором, или в обоих выстрелах.

Разностью двух событий A и B называется событие C, состоящее в том, что в результате испытания произошло событие A и не произошло событие B.

Разность событий обозначается как $C = A - B$.

Теорема 4.1 (сложения). Вероятность суммы двух несовместимых событий A и B равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Следствие. Вероятность появления одного из нескольких попарно несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n)$$

Пример 4.9. На клумбе растут 20 красных, 30 синих и 40 белых астр. Какова вероятность сорвать в темноте окрашенную астру, если рвется одна астра?

Решение.

Искомая вероятность равна сумме вероятностей сорвать красную или синюю астру, т. е.

$$P(A + B) = P(A) + P(B) = \frac{20}{90} + \frac{30}{90} = \frac{50}{90} = \frac{5}{9}.$$

Теорема 4.2. Сумма вероятностей двух противоположных событий A и $\overline{A}$ равна единице:

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1.$$

Замечание. Если вероятность одного из двух противоположных событий обозначена через p, то вероятность другого события обозначают через q. Таким образом, в силу предыдущей теоремы

$$p + q = 1.$$

Пример 4.10. Вероятность того, что день будет дождливым, $p = 0{,}7$. Найдем вероятность того, что день будет ясным. События «день дождливый» и «день ясный» – противоположные, поэтому искомая вероятность

$$q = 1 - p = 1 - 0{,}7 = 0{,}3.$$

Теорема 4.3. Сумма вероятностей несовместных событий, образующих полную группу событий равна единице.

$$P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n) = 1.$$

Теорема умножения вероятностей независимых событий

Для рассмотрения последующих теорем необходимо ввести понятия зависимых и независимых событий.

Событие A называется **независимым** от события B, если вероятность события A не зависит от того, произошло событие B или нет.

Несколько событий называются **независимыми в совокупности**, если каждое из них и любая комбинация остальных событий есть события независимые.

Несколько событий называются **попарно независимыми**, если любые два из этих событий независимы.

Например, если монета брошена 2 раза, вероятность появления герба в первом испытании (событие A) не зависит от появления или непоявления герба во втором испытании (событие B). В свою очередь вероятность выпадения герба во втором испытании не зависит от результата первого испытания. Такие события A и B будут независимыми.

Произведением или пересечением (совмещением) двух событий A и B называется событие *C*, которое состоит в осуществлении и события *A* и события *B*.

Произведение событий обозначается как $C = A \cdot B$.

Например, если *A* – деталь годная, *B* – деталь окрашенная, то *AB* – деталь годна и окрашена.

Произведением нескольких событий называют событие, состоящее в совместном появлении всех этих событий.

Например, если A, B, C – появление «герба» соответственно в первом, втором и третьем бросаниях монеты, то ABC – выпадение «герба» во всех трех испытаниях.

Теорема 4.4. Вероятность сложного события, состоящего из совпадения двух независимых событий, равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B).$$

Пример 4.11. Вероятность выживания одного организма в течение 30 минут $P = 0{,}7$. В пробирке с благоприятными для существования этих организмов условиями находятся только что два родившихся организма. Какова вероятность того, что через 30 минут они будут живы?

Решение.

Пусть событие A – первый организм жив через 30 мин, событие B – второй организм жив через 30 мин. Будем считать, что между организмами нет внутривидовой конкуренции, т. е. события A и B независимы. Событие, состоящее в том, что оба организма живы, есть событие AB. Таким образом, искомая вероятность:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}7 \cdot 0{,}7 = 0{,}49.$$

Вероятность осуществления хотя бы одного события

Вероятность появления (наступления) события A, состоящего в появлении хотя бы одного из событий $A_1, A_2, ..., A_n$, независимых в совокупности, равна разности между единицей и произведением, вероятностей противоположных событий $\overline{A}_1, \overline{A}_2, ..., \overline{A}_n$:

$$P(A) = 1 - \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot ... \cdot \overline{A}_n \quad \text{или} \quad P(A) = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot ... \cdot q_n$$

В частности, если все события имеют одинаковую вероятность, равную p, то вероятность появления хотя бы одного из этих событий

$$P(A) = 1 - q^n.$$

Пример 4.12. Медсестра обслуживает четырех больных. Вероятность того, что в течение часа первый больной потребует внимания медсестры, равна $p_1 = 0{,}7$; второй – $p_2 = 0{,}6$; третий – $p_3 = 0{,}5$; четвертый – $p_4 = 0{,}4$. Найти вероятность того, что хотя бы один больной в течение часа потребует внимания медсестры.

Решение.

Вероятности того, что больные не потребуют внимания медсестры в течение часа равны:

$$q_1 = 1 - p_1 = 1 - 0{,}7 = 0{,}3;$$
$$q_2 = 1 - p_2 = 1 - 0{,}6 = 0{,}4;$$
$$q_3 = 1 - p_3 = 1 - 0{,}5 = 0{,}5;$$
$$q_4 = 1 - p_4 = 1 - 0{,}4 = 0{,}6.$$

Искомую вероятность находим по формуле $P(A) = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot ... \cdot q_n$:

$$p = 1 - 0{,}3 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}6 = 0{,}964.$$

Теорема сложения вероятностей совместных событий

Теорема 4.5. Вероятность суммы двух совместных событий A и B равна сумме вероятностей этих событий минус вероятность их произведения***:***

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Замечание. Если события A и B несовместимы, то их произведение AB есть невозможное событие и, следовательно, $P(AB)=0$.

Пример 4.13. Вероятности попадания в цель при стрельбе первого и второго орудий соответственно равны: $P(A)=0{,}7$ и $P(B)=0{,}8$. Найти вероятность попадания при одном залпе (из обоих орудий) хотя бы одним из орудий.

Очевидно, события A и B совместны и независимы. Поэтому

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0{,}7+0{,}8-0{,}7\cdot 0{,}8=1{,}5-0{,}56=0{,}94.$$

Теорема умножения вероятностей зависимых событий.

Событие B называется **зависимым** от события A, если вероятность события B меняется в зависимости от того, произошло событие A или нет.

Во введении случайное событие определено как событие, которое при осуществлении совокупности условий S может произойти или не произойти. Если при вычислении вероятности события никаких других ограничений, кроме условий S, не налагается, то такую вероятность называют **безусловной**; если же налагаются и другие дополнительные условия, то вероятность события называют **условной**. Например, часто вычисляют вероятность события B при дополнительном условии, что произошло событие A.

Вероятность события B, вычисленная при условии, что имело место событие A, называется **условной вероятностью события В** и обозначается как $P_A(B)$ или $P(B/A)$.

Пример 4.14. В урне два белых шара и один черный. Пусть появление белого шара при первом извлечении будет событием A, при втором извлечении – событием B. При первом извлечении шара вероятность события A $P(A)=\dfrac{2}{3}$. Шары после извлечения в урну не возвращаются. Найти вероятность события B при условии, что: 1) событие A произошло; 2) событие A не произошло.

Решение.

1) Если событие A произошло, то условная вероятность события B:

$$P(B/A)=\frac{1}{2}.$$

2) Если известно, что событие A не произошло, то условная вероятность события B :

$$P(B/A)=\frac{2}{2}=1 .$$

Теорема 4.6. Вероятность произведения двух зависимых событий A и B равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, найденную в предположении, что первое событие уже наступило:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A).$$

Следствие. Вероятность совместного появления нескольких событий равна произведению вероятности одного из них на условные вероятности всех остальных, причем вероятность каждого последующего события вычисляется в предположении, что все предыдущие события уже появились:

$$P(ABC) = P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{AB}(C).$$

Заметим, что порядок, в котором расположены события, может быть выбран любым, т. е. безразлично какое событие считать первым, вторым и т. д.

Пример 4.15. В терапевтическом отделении больницы 70 % пациентов – женщины, а 21 % – курящие мужчины. Наугад выбирают пациента. Он оказывается мужчиной. Какова вероятность, что он курит?

Решение.

Пусть событие A означает, что пациент – мужчина, а событие B – что пациент курит. Тогда в силу условия задачи $P(A) = 0{,}3$, а $P(AB) = 0{,}21$. Поэтому искомая условная вероятность равна

$$P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{0{,}21}{0{,}3} = 0{,}7.$$

Пример 4.16. Студент пришел на экзамен, зная лишь 40 из 50 вопросов программы. В билете три вопроса. Найти вероятность того, что студент ответит на первый вопрос билета – событие A, на второй вопрос билета – событие B и на третий вопрос билета – событие C.

Решение.

Вероятность того, что студент ответит на первый вопрос равна:

$$P(A) = \frac{40}{50} = \frac{4}{5}$$

Вероятность того, что студент ответит на второй вопрос, вычисленная при условии, что он ответил на первый вопрос, т. е. условная вероятность, равна

$$P(B/A) = \frac{39}{49}.$$

Вероятность того, что студент ответит на третий вопрос билета в предположении, что он ответил на первый и второй вопрос, т. е. условная вероятность, равна

$$P(C/AB) = \frac{38}{48} = \frac{19}{24}.$$

Тогда искомая вероятность

$$P(ABC)=P(A)\cdot P(B/A)\cdot P(C/AB)=\frac{4}{5}\cdot\frac{39}{49}\cdot\frac{19}{24}\approx 0{,}5.$$

Формула полной вероятности.

Следствием теоремы сложения вероятностей для несовместных событий и теоремы умножения вероятностей для зависимых событий является так называемая формула полной вероятности.

Пусть некоторое событие A может произойти при условии, что появляется одно из несовместных событий $A_1, A_2, ..., A_n$, образующих полную группу событий.

Теорема 4.7. Вероятность события A, которое может наступить лишь при условии появления одного из n попарно несовместных событий $A_1, A_2, ..., A_n$, образующих полную группу, равна сумме произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующую условную вероятность события A:

$$P(A)=P(A_1)\cdot P(A/A_1)+P(A_2)\cdot P(A/A_2)+...+P(A_n)\cdot P(A/A_n)$$

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)\cdot P(A/A_i).$$

Формулу называют **формулой полной вероятности**.

Пример 4.17. Даны три одинаковые на вид аптечки. В первой аптечке находится 2 тюбика кодеина и 2 тюбика фталазола, во второй – 4 тюбика кодеина и 2 тюбика фталазола, в третьей 5 тюбиков кодеина и 3 тюбика фталазола. Выбирают наудачу одну из аптечек и вынимают из нее тюбик. Найти вероятность того, что вынутый тюбик будет тюбиком кодеина.

Решение.

Здесь событие A – появление тюбика кодеина – может произойти с одним из событий: A_1 – выбор первой аптечки, A_2 – выбор второй аптечки, A_3 – выбор третьей аптечки.

Выбор каждой аптечки равновозможен, поэтому

$$P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=\frac{1}{3}$$

Условные вероятности события A при событиях A_1, A_2 и A_3 соответственно равны

$$P(A/A_1)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2},\qquad P(A/A_2)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3},\qquad P(A/A_3)=\frac{5}{8}.$$

По формуле полной вероятности

$$P(A) = P(A_1)\cdot P(A/A_1) + P(A_2)\cdot P(A/A_2) + P(A_3)\cdot P(A/A_3) =$$
$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{5}{8} \approx 0{,}6;$$

т. е. вероятность того, что вынутый тюбик будет тюбиком кодеина, равна 0,6.

§ 4.4. Повторные независимые испытания. Формула Байеса

Некоторые сведения из комбинаторики

Комбинаторика раздел математики, изучающий дискретные объекты, множества (сочетания, перестановки, размещения и перечисления элементов) и отношения на них. В более широком понимании комбинаторика – это теория конечных множеств. Комбинаторные методы применяются в теории вероятностей, статистике, экономике, физике, химии, биологии и других науках.

Рассмотрим наиболее употребительные формулы комбинаторики.

Перестановки

Пусть M – некоторое конечное множество, состоящее из n элементов:

$$M = \{a, b, c, ..., l\}.$$

Перестановкой называется всякое расположение элементов данного конечного множества, получающееся при некотором упорядочении этого множества.

Упорядочить множество – значит выбрать какой-либо элемент этого множества и назвать его первым, выбрать какой-либо другой элемент и назвать его вторым и т. д., а последний элемент назвать n.

Число перестановок из n элементов равно произведению первых n натуральных чисел, т. е.

$$P_n = 1\cdot 2\cdot 3\cdot (n-1)n = n!$$

Произведение n первых натуральных чисел обозначают через $n!$ (читается: «*эн факториал*»).

$$n! = (n-1)!n$$

Пример 4.18. Сколькими способами можно разместить 7 больных в палате, насчитывающей 7 коек.

Решение.

Число способов равно $P_7 = 7! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7 = 5040$.

Размещения

Число упорядоченных множеств по m элементов, которые можно образовать из элементов множества, содержащего n элементов, называется размещением из n по m. Это число обозначается через A_n^m (читается: «*A из n по m*»).

Число размещений из n по m вычисляется по формуле

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)...(n-m+1).$$

Пример 4.19. Найти количество всех трехзначных чисел, состоящих из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Решение.

$$A_9^3 = 9 \cdot 8 \cdot (9-3+1) = 504.$$

Сочетания

Пусть множество *M* содержит n элементов. Число подмножеств множества *M*, состоящих из m элементов (безразлично в каком порядке выбираются элементы), называется сочетанием из n по m и обозначается символом C_n^m или $\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix}$.

Основная формула для вычисления числа сочетаний из n элементов, взятых по m, $0 < m < n$, имеет вид

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Иногда при вычислении числа C_n^m удобнее пользоваться формулой

$$C_n^m = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-m+1)}{m!} = \frac{A_n^m}{m!}.$$

Некоторые свойства числа сочетаний:

1. $C_n^m = C_n^{n-m}$,
2. Сумма $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n = 2^n$,
3. $C_n^{m+1} = \dfrac{n-m}{m+1} C_n^m$,
4. $C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m$.

Четвертое свойство позволяет вычислять биномиальные коэффициенты с помощью так называемого **треугольника Паскаля**:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & C_0^1 & & & & \\
 & & & C_1^0 & & C_1^1 & & & \\
 & & C_2^0 & & C_2^1 & & C_2^2 & & \\
 & C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_3^3 & \\
C_4^0 & & C_4^1 & & C_4^2 & & C_4^3 & & C_4^4 \\
 & & & & \ldots & & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
 & & & & \ldots & & & &
\end{array}
$$

в котором каждое число (кроме крайних единиц) равно сумме двух, расположенных над ними. В треугольнике Паскаля m-е число в n-й строке (нумерация элементов начинается с нуля) – это биномиальный коэффициент C_n^m.

Связь между числами A_n^m, P_n и C_n^m выражается равенством:

$$A_n^m = P_m \cdot C_n^m.$$

Пример 4.20. Найти число равновозможных случаев распределения пяти лотерейных билетов среди 25 студентов.

Решение.

Число всех равновозможных случаев распределения 5 билетов среди 25 студентов равно числу сочетаний из 25 элементов по 5, т. е.

$$C_{25}^5 = \frac{25!}{5!20!} = 53130.$$

Формула Байеса

Если вероятность совместного появления зависимых событий A и B не зависит от того, в каком порядке они происходят, то

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A) = P(B) \cdot P(A/B).$$

В этом случае условную вероятность одного из событий можно найти, зная вероятности обоих событий и условную вероятность второго:

$$P(B/A) = \frac{P(B) \cdot P(A/B)}{P(A)}.$$

Обобщением данной формулы на случай многих событий является формула Байеса.

Пусть n несовместных случайных событий $A_1, A_2, ..., A_n$ образуют полную группу событий. Вероятности этих событий $P(A_1), P(A_2), ..., P(A_n)$ известны и, так как они образуют полную группу, то $\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$.

Некоторое случайное событие A связано с событиями $A_1, A_2, ..., A_n$. Причем известны условные вероятности появления события A с каждым из событий A_i, т.е. известны $P(A/A_1), P(A/A_2), ..., P(A/A_n)$. При этом сумма условных вероятностей $P(A/A_i)$ может быть не равна единице, т.е. $\sum_{i=1}^{n} P(A/A_i) \neq 1$. Тогда условная вероятность появления события A_i при реализации события A (т.е. при условии, что событие A произошло) определяется **формулой Байеса**:

$$P(A_i / A) = \frac{P(A_i) \cdot P(A/A_i)}{P(A_1) \cdot P(A/A_1) + P(A_2) \cdot P(A/A_2) + ... + P(A_n) \cdot P(A/A_n)}.$$

Причем для этих условных вероятностей $\sum_{i=1}^{n} P(A_i / A) = 1$.

Формула Байеса нашла широкое применение не только в математике, но и в медицине. Например, она используется для вычисления вероятности тех или иных заболеваний. Так, если $A_1, A_2, ..., A_n$ – предполагаемые диагнозы для данного пациента, A – некоторый признак, имеющий отношение к ним (симптом, определенный показатель анализа крови или мочи, деталь рентгенограммы и т.д.), а условные вероятности $P(A/A_i)$ проявления этого признака при каждом диагнозе $(i = 1,2,...n)$ заранее известны, то формула Байеса позволяет вычислить условные вероятности заболеваний (диагнозов) $P(A_i / A)$ после того как установлено, что характерный признак присутствует у пациента.

Пример 4.21. При первичном осмотре больного предполагаются 3 диагноза – A_1, A_2, A_3. Их вероятности, по мнению врача, распределяются так: $P(A_1) = 0{,}5$; $P(A_2) = 0{,}17$; $P(A_3) = 0{,}33$. Следовательно, предварительно наиболее вероятным кажется первый диагноз. Для его уточнения назначается, например, анализ крови, в котором ожидается увеличение СОЭ (событие А). Заранее известно (на основании результатов исследований), что вероятности увеличения СОЭ при предполагаемых заболеваниях равны: $P(A/A_1) = 0{,}1$; $P(A/A_2) = 0{,}2$; $P(A/A_3) = 0{,}9$.

В полученном анализе зафиксировано увеличение СОЭ (событие A произошло). Тогда расчет по формуле Байеса дает значения вероятностей предполагаемых заболеваний при увеличенном значении СОЭ: $P(A_1 / A) = 0{,}13$; $P(A_2 / A) = 0{,}09$; $P(A_3 / A) = 0{,}78$.

Эти цифры показывают, что с учетом лабораторных данных наиболее реален не первый, а третий диагноз, вероятность которого теперь оказалась достаточно большой.

Приведенный пример – простейшая иллюстрация того, как с помощью формулы Байеса можно формализовать логику врача при постановке диагноза и благодаря этому создать методы компьютерной диагностики.

Пример 4.22. Вычислите вероятность, оценивающую степень риска перинатальной[1] смертности ребенка у женщин с анатомически узким тазом.

Решение.

Пусть событие A_1 – благополучные роды; согласно клиническим отчетам, $P(A_1)=0{,}975=97{,}5\%$, тогда, если A_2 – факт перинатальной смертности, то $P(A_2)=1-0{,}975=0{,}025=2{,}5\%$.

Обозначим A – факт наличия узкого таза у роженицы. Из проведенных исследований известны: а) $P(A/A_1)$ – вероятность узкого таза при благоприятных родах, $P(A/A_1)=0{,}029$, б) $P(A/A_2)$ – вероятность узкого таза при перинатальной смертности, $P(A/A_2)=0{,}051$. Тогда искомая вероятность перинатальной смертности при узком тазе у роженицы рассчитывается по формуле Байеса и равна:

$$P(A_2/A)=\frac{P(A_2)\cdot P(A/A_2)}{P(A_1)\cdot P(A/A_1)+P(A_2)\cdot P(A/A_2)};$$

$$P(A_2/A)=\frac{0{,}025\cdot 0{,}051}{0{,}975\cdot 0{,}029+0{,}025\cdot 0{,}051}=0{,}044=4{,}4\%.$$

Таким образом, риск перинатальной смертности при анатомически узком тазе значительно выше (почти вдвое) среднего риска (4,4% против 2,5%).

Подобные расчеты, обычно выполняемые с помощью компьютера, лежат в основе методов формирования групп пациентов повышенного риска, связанного с наличием того или иного отягощающего фактора.

§ 4.5. Повторные независимые испытания

Формула Бернулли

При практическом применении теории вероятностей особое значение имеют события, связанные с независимыми повторными испыта-

---

[1] Перинатальный период охватывает внутриутробное развитие плода, начиная с 28-й недели беременности, период родов и первые 7 суток жизни ребенка.

ниями, для которых:

1) каждое испытание имеет только два исхода:

а) событие A произошло;

б) событие A не произошло;

2) все испытания независимы друг от друга, т. е. вероятность появления события A в каждом из них не зависит от того, какие результаты наступили в остальных испытаниях;

3) вероятность появления события A в каждом испытании постоянна.

Приведенные выше условия получили название **схемы Бернулли.**

Примерами повторных испытаний, описываемых схемой Бернулли, могут служить: многократное подбрасывание монеты или многократное извлечение из урны одного шара при условии, что вынутый шар после регистрации его цвета возвращается обратно в урну.

Во многих задачах требуется найти не вероятность каждого отдельного испытания, а вероятность появления события A ровно m раз в данной серии из n испытаний Бернулли, независимо от того, в каких испытаниях оно наступило.

Если производится несколько испытаний, причем вероятность события A в каждом испытании не зависит от исходов других испытаний, то такие испытания называют **независимыми относительно события *A*.**

В разных независимых испытаниях событие A может иметь либо различные вероятности, либо одну и ту же вероятность. Будем далее рассматривать лишь такие независимые испытания, в которых событие A имеет одну и ту же вероятность.

Ниже воспользуемся понятием **сложного события**, понимая под ним совмещение нескольких отдельных событий, которые называют **простыми.**

Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых событие A может появиться либо не появиться. Условимся считать, что вероятность события A в каждом испытании одна и та же, а именно равна p. Следовательно, вероятность ненаступления события A в каждом испытании также постоянна и равна $q=1-p$.

Поставим перед собой задачу вычислить вероятность того, что при n испытаниях событие A осуществится ровно m раз и, следовательно, не осуществится $n-m$ раз. Важно подчеркнуть, что не требуется, чтобы событие A повторилось ровно m раз в определенной последовательности.

Искомую вероятность обозначим $P_n(m)$. Например, символ $P_5(3)$ означает вероятность того, что в пяти испытаниях событие появится ровно 3 раза и, следовательно, не наступит 2 раза.

Поставленную задачу можно решить с помощью так называемой

формулы Бернулли:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m} \quad .$$

Рассмотрим частные случаи формулы Бернулли.

1. Вероятность появления события A в n испытаниях ровно n раз равна

$$P_n(n) = C_n^n p^n q^{n-n} = \frac{n!}{n!\cdot 0!} p^n = p^n .$$

2. Вероятность появления события A в n испытаниях нуль раз равна

$$P_n(0) = \frac{n!}{0!\cdot n!} p^0 q^n = q^n .$$

3. Вероятность появления события A в n испытаниях не более m раз равна

$$R_n(m) = P_n(0) + P_n(1) + P_n(2) + ... + P_n(m) .$$

4. Вероятность появления события A в n испытаниях не менее m раз равна

$$R_n(m) = P_n(m) + P_n(m+1) + ... + P_n(n) .$$

Пример 4.23. Появление колонии микроорганизмов данного вида в определенных условиях оценивается вероятностью $p = 0{,}9$. Какова вероятность того, что из 5 случаев эта колония микроорганизмов появится 3 раза?

Решение.

Вероятность непоявления колонии микроорганизмов равна

$$q = 1 - p = 1 - 0{,}9 = 0{,}1 .$$

По формуле Бернулли

$$P_5(3) = C_5^3 p^3 q^2 = \frac{5!}{3!(5-3)!}(0{,}9)^3(0{,}1)^2 = 0{,}07 .$$

Теорема Лапласа локальная (в дифференциальной форме)

Формула Бернулли позволяет вычислить вероятность того, что событие появится в n испытаниях ровно m раз. При выводе предполагалось, что вероятность появления события в каждом испытании постоянна. Легко видеть, что пользоваться формулой Бернулли при больших значениях n достаточно трудно, так как формула требует выполнения действий над громадными числами.

Естественно возникает вопрос: нельзя ли вычислить интересующую нас вероятность, не прибегая к формуле Бернулли? Оказывается, можно. Локальная теорема Лапласа и дает асимптотическую формулу, которая позволяет приближенно найти вероятность появления события ровно m раз в n испытаниях, если число испытаний достаточно велико.

Заметим, что для частного случая, а именно для $p = 1/2$, асимптотическая формула была найдена в 1730 г. Муавром; в 1783 г. Лаплас обобщил формулу Муавра для произвольного p, отличного от 0 и 1. Поэтому теорему, о которой здесь идет речь, иногда называют **теоремой Муавра – Лапласа**.

Доказательство локальной теоремы Лапласа довольно сложно, поэтому мы приведем лишь формулировку теоремы и примеры, иллюстрирующие ее использование.

Локальная теорема Муавра – Лапласа: Если вероятность наступления некоторого события A в n независимых испытаниях постоянна и отлична от нуля и единицы ($0 < p < 1$), то вероятность $P_n(m)$ того, что в n испытаниях событие А наступит ровно m раз, приближенно равна (тем точнее, чем больше n) значению функции

$$y = \frac{1}{\sqrt{npq}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-x^2/2} = \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x),$$

где

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-x^2/2}; \qquad x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}.$$

Функция $\varphi(x)$ четная, т. е. $\varphi(-x) = \varphi(x)$. Таблица значений функции $\varphi(x)$ приведена в приложении 1. Таким образом, вероятность того, что событие A появится в n независимых испытаниях m раз, приближенно равна

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x), \quad \text{где} \quad x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}.$$

Как уже было отмечено выше, формула Муавра – Лапласа применима, если число испытаний n достаточно велико, а вероятности p и q не очень близки к нулю (обычно достаточно условий $n > 100$, $npq > 20$).

Пример 4.24. Найти вероятность того, что событие A наступит ровно 50 раз в 600 испытаниях, если вероятность появления этого события в каждом испытании равна 0,1.

Решение.

По условию задачи $n = 600$, $m = 50$; $p = 0{,}1$; $q = 0{,}9$.

$$P_{600}(50) \approx \frac{1}{\sqrt{600 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9}} \varphi(x) = 0{,}13\,\varphi(x).$$

Значение $x = \dfrac{m - np}{\sqrt{npq}} = \dfrac{50 - 600 \cdot 0{,}1}{\sqrt{600 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9}} = -1{,}3$.

Из приложения 1 находим $\varphi(-1{,}3) = \varphi(1{,}3) = 0{,}1714$.

Искомая вероятность

$$P_{600}(50) \approx 0{,}13 \cdot 0{,}1714 = 0{,}02.$$

Теорема Лапласа интегральная

Предположим, что производится n испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A постоянна и равна p $(0 < p < 1)$. Как вычислить вероятность $P_n(m_1, m_2)$ того, что событие A появится в n испытаниях не менее m_1 и не более m_2 раз (для краткости будем говорить «от m_1 до m_2»)? На этот вопрос отвечает интегральная теорема Лапласа, которая приводится ниже, опустив доказательство.

Теорема 4.7. Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна и отлична от нуля $(0 < p < 1)$, то вероятность $P_n(m_1, m_2)$ того, что событие A появится в n испытаниях от m_1 до m_2 раз, определяется по формуле

$$P_n(m_1, m_2) \cong \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{e}^{-z^2/2}\, dz,$$

где
$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Неопределенный интеграл $\int_{x_1}^{x_2} \mathrm{e}^{-z^2/2}\, dz$ не выражается через элементарные функции, поэтому в приложении 2 приведены значения функции

$$\varPhi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \mathrm{e}^{-z^2/2} dz.$$

В приложении 2 даны значения функции $\varPhi(x)$ для положительных значений x и для $x = 0$. Для $x < 0$ пользуются той же таблицей, используя нечетность функции $\varPhi(x)$, т. е. $\varPhi(-x) = -\varPhi(x)$. Функцию $\varPhi(x)$ часто называют **функцией Лапласа**.

$$P_n(m_1, m_2) \cong \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-z^2/2} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{0} e^{-z^2/2} dz + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x_2} e^{-z^2/2} dz =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x_2} e^{-z^2/2} dz - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x_1} e^{-z^2/2} dz = \varPhi(x_2) - \varPhi(x_1).$$

Таким образом, вероятность того, что событие A появится в n независимых испытаниях от m_1 до m_2 раз равна

$$P_n(m_1, m_2) \approx \varPhi(x_2) - \varPhi(x_1),$$

где
$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Отметим, что интегральная теорема Лапласа применима, если число испытаний n достаточно велико, а вероятность p не слишком мала (велика).

Пример 4.25. Вероятность того, что студент не прошел профилактического осмотра, равна 0,1. Найти вероятность того, что среди 100 случайно отобранных студентов не прошли профилактического осмотра от 10 до 20 человек.

Решение.

По условию задачи $p = 0{,}1$, $q = 0{,}9$, $n = 100$, $m_1 = 10$, $m_2 = 20$.

$$P_{100}(10{,}20) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1);$$

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{10 - 100 \cdot 0{,}1}{\sqrt{100 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9}} = 0;$$

$$x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{20 - 100 \cdot 0{,}1}{\sqrt{100 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9}} = 3{,}3.$$

Из приложения 2 находим $\Phi(0) = 0$, $\Phi(3{,}3) = 0{,}49$.

Искомая вероятность

$$P_{100}(10{,}20) \approx \Phi(3{,}3) - \Phi(0) = 0{,}49.$$

Закон Пуассона

При определении вероятности того, что в n независимых испытаниях (испытаниях Бернулли) событие произойдет m раз, используют формулу Бернулли. В случае, когда n велико, пользуются асимптотической формулой Лапласа. Однако эта формула непригодна, если вероятность события мала.

При больших n и малых $p \le 0{,}1$ пользуются **асимптотической формулой Пуассона**

$$P_n(m) \approx \frac{\mu^m}{m!} e^{-\mu}, \qquad \text{где } \mu = np.$$

Последнюю формулу нередко называют **законом Пуассона** или **законом редких событий**. Точное выражение для $P_n(m)$ зависит от трех параметров: n, m, p, в приближенном выражении параметры n и p связаны в один параметр $\mu = np$.

Пример 4.26. Фармзавод отправил на аптечный склад 10 000 ампул витамина «С». Вероятность того, что в пути ампула повредится, равна 0,0002. Найти вероятность того, что на склад прибудут 5 негодных ампул.

Решение.

По условию $n = 10000$, $p = 0{,}0002$, $m = 5$.

Параметр $\mu = np = 2$.

По формуле $P_n(m) \approx \dfrac{\mu^m}{m!} e^{-\mu}$ получаем:

$$P_{10000}(5) \approx \frac{\mu^m}{m!} e^{-\mu} = \frac{2^5}{5!} e^{-2} = 0{,}035.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Что изучает теория вероятности?
2. Назовите основные задачи теории вероятностей.
3. Что такое испытание? Приведите примеры.
4. Дайте определение событию. Приведите примеры.
5. Что называют случайным событием? Приведите примеры.
6. Перечислите виды случайных событий.
7. Какое событие называют достоверным? Приведите примеры.
8. Какое событие называют невозможным? Приведите примеры.
9. Какие два события называют несовместными? совместными? Приведите примеры.
10. Какие n событий ($n > 2$) называют несовместными попарно? в совокупности? Приведите примеры.
11. Какие события называют противоположными?
12. Какие действия над событиями вы знаете?
13. Что называется суммой, разностью, произведением событий? Приведите примеры.
14. Что такое вероятность?
15. Приведите классическое определение вероятности.
16. Приведите статистическое определение вероятности.
17. Перечислите основные свойства вероятности.
18. Сформулируйте теоремы сложения вероятностей для совместных и несовместных событий.
19. Какие два события называют независимыми? зависимыми? Приведите примеры.
20. Дайте определение условной вероятности.
21. Какие n событий называют независимыми в совокупности? попарно?
22. Какая существует связь между совместными и зависимыми событиями?
23. Напишите формулу полной вероятности.
24. Что называют сочетанием? размещением? перестановкой?
25. Напишите формулу Байеса. Приведите примеры использования данной формулы.
26. Что называют схемой Бернулли?

27. Напишите формулу Бернулли. В каких случаях можно применять формулу Бернулли?
28. Сформулируйте локальную и интегральную теоремы Лапласа.
29. В каких случаях можно применять локальную теорему Лапласа? интегральную теорему Лапласа?
30. Напишите формулу Пуассона. В каких случаях можно применять формулу Пуассона?

Задания для решения

1. Среди 500 ампул проверенных на герметичность, оказалось 10 ампул с трещинами. Вычислить относительную частоту появления ампул, имеющих трещины.

2. Среди 300 пробирок, изготовленных на автоматической линии, оказалось 15 не отвечающих стандарту. Найти частоту появления стандартных пробирок.

3. Примерно 1 ребенок из 700 рождается с синдромом Дауна. В больнице большого города в год рождается 3500 детей. Каково ожидаемое число новорожденных с синдромом Дауна?

4. В коробке 30 таблеток: 10 красных, 5 желтых, 15 белых. Найти вероятность появления цветной таблетки (т.е. или красной или желтой).

5. Опухоль – «мишень» разделена на три области. При использовании радионуклидного препарата вероятность поражения первой области равна 0,45; второй – 0,35. Найти вероятность того, что при однократном использовании радионуклид попадет либо в первую, либо во вторую мишень.

6. В коробке имеется 7 желтых и несколько белых таблеток. Какова вероятность извлечь белую таблетку, если вероятность извлечь желтую таблетку равна $\frac{1}{6}$? Сколько белых таблеток в коробке?

7. В картотеке имеются истории болезней 8 пациентов. Если наугад взять первую, затем вторую, третью и т.д. истории болезней, то какова вероятность в каждом случае изъятия нужной истории болезни? Предполагается, что искомая история болезни имеется в картотеке. Рассмотрите 2 варианта: а) взятые истории болезней не возвращаются в картотеку; б) взятые истории болезней каждый раз возвращаются в картотеку и хаотически располагаются в ней.

8. С первого предприятия поступило 200 пробирок, из которых 190 стандартных, а со второго – 300, из которых 280 стандартных. Найти вероятность того, что наудачу взятая пробирка будет стандартной.

9. На тридцати историях болезни написаны 30 двузначных чисел от 1 до 30 (их порядковые номера). Эти истории болезни лежат на полке

в случайном порядке. Какова вероятность вынуть историю болезни с номером, кратным 2 или 3?

10. Известно, что в партии из 1000 стандартных ампул с новокаином 400 ампул изготовлено на одном заводе, 350 – на втором и 250 ампул – на третьем. Известны также вероятности 0,75; 0,80; 0,85 того, что ампула окажется без дефекта при изготовлении ее соответственно на первом, втором и третьем заводах. Какова вероятность того, что наугад выбранная из данной партии ампула с новокаином окажется без дефекта?

11. Во время эпидемии в одном из населенных пунктов 60% жителей оказались больными. Из каждых 100 больных 10 требуют срочной медицинской помощи. Найти вероятность того, что любому взятому наугад жителю необходима срочная медицинская помощь.

12. Два автомата производят одинаковые хирургические зажимы. Производительность первого автомата вдвое больше, чем второго. Первый автомат производит в среднем 60% зажимов отличного качества, а второй – 84%. Наудачу взятый зажим оказался отличного качества. Найти вероятность того, что он произведен первым автоматом.

13. Три врача независимо друг от друга осмотрели одного и того же больного. Вероятность того, что первый врач допустит ошибку при установлении диагноза, равна 0,01. Для второго и третьего врачей эта вероятность соответственно 0,015 и 0,02. Найти вероятность того, что при осмотре больного хотя бы один из врачей допустит ошибку в диагнозе.

14. Вероятность того, что в течение дня прибор для определения распадаемости таблеток выйдет из строя, равна 0,03. Какова вероятность того, что в течение четырех дней подряд прибор не выйдет из строя?

15. При синтезировании в лабораторных условиях какого-то вещества вероятность взрыва в отдельном опыте p=0,02. Вычислить вероятность того, что: 1) в серии из 10 синтезов взрыв произойдет три раза; 2) взрыва не произойдет.

16. Лечение определенного заболевания дает эффект (выздоровление) в 75% случаев. Оно проводилось шести больным. Какова вероятность того, что: 1) выздоровеют все шестеро; 2) не выздоровеет ни один?

17. Вероятность удачного выполнения сложного химического опыта равна $p=\dfrac{2}{3}$. Найти вероятность того, что из 10 испытаний удачными будут два.

18. Операция пересадки кожи дает успех в 40% всех случаев. Пациенту делают пересадку кожи несколько раз подряд до тех пор, пока она не удается. Какова вероятность того, что пересадка окажется

успешной: 1) с первой попытки; 2) с третьей попытки?

19. Имеется 1000 медицинских карточек, в которых интересующее нас заболевание встречается 100 раз. Найти вероятность того, что это заболевание встретится в 100 наугад отобранных карточках.

20. Завод медицинского оборудования выпускает 90% фонендоскопов первого сорта и 10% фонендоскопов второго сорта. Наугад выбирают 1000 фонендоскопов. Найти вероятность того, что число фонендоскопов первого сорта будет равно 900.

21. Завод отправил на аптечный склад 5000 термометров. Вероятность повреждений каждого термометра в пути равна 0,0002. Какова вероятность того, что на аптечный склад прибудет ровно 3 поврежденных термометра?

22. В аптеку поступило 1000 бутылок минеральной воды. Вероятность того, что при перевозке бутылка окажется разбитой, равна 0,003. Найти вероятность того, что аптека получит разбитых бутылок: 1) ровно две; 2) менее двух; 3) более двух; 4) хотя бы одну.

23. Вероятность заболевания туберкулезом легких в данной местности равна 0,003. Какова вероятность того, что при осмотре 1000 человек будет выявлено трое больных?

24. Пусть вероятность того, что электрокардиограф потребует ремонта в течение гарантийного срока, равна 0,2. Найти вероятность того, что в течение гарантийного срока из шести электрокардиографов: 1) не более одного потребует ремонта; 2) хотя бы один потребует ремонта.

25. Аптечный склад получает лекарственные препараты с трех фармацевтических заводов, причем количество препаратов, поступающих с каждого завода, в среднем одинаково. Для аптечного склада желательно получить очередную партию лекарств с завода №1 либо №2. Вычислить вероятность этого события.

26. Имеется три аппарата для изготовления таблеток. Вероятность остановки на протяжении часа составляет: для первого аппарата – 0,2, для второго – 0,15 и для третьего – 0,12. Какова вероятность бесперебойной работы всех трех аппаратов на протяжении одного часа?

27. Вероятность бесперебойной работы двух аппаратов для запаивания ампул на протяжении одного часа составляет: для первого – 0,75; для второго – 0,8. Какова вероятность того, что оба аппарата будут бесперебойно работать на протяжении двух часов?

28. В партии из 1000 стандартных ампул с новокаином 400 ампул изготовлено на первом заводе, а остальные – на втором. Вероятность того, что без дефекта окажется ампула, изготовленная на первом заводе, равна 0,75, на втором заводе 0,80. Найти вероятность того, что любая наугад взятая ампула окажется без дефекта.

29. В пяти аптечках находится одинаковые по массе и размерам таблетки. В двух – по 6 зеленых и 4 желтых таблеток. (Это аптечка со-

става A_1) . В двух других аптечках (состава A_2) – по 8 зеленых и 2 желтых таблеток. В одной аптечке (состава A_3) – 2 зеленых и 8 желтых таблеток. Наудачу выбирается аптечка и из нее извлекается таблетка, которая оказалась зеленой. Какова вероятность того, что зеленая таблетка извлечена из аптечки первого состава?

30. Одна вакцина формирует иммунитет по отношению к краснухе в 95% случаев. Предположим, что вакцинировались 30% населения и что вероятность заболеть краснухой у вакцинированного человека без иммунитета такая же, как и у невакцинированного. Какова вероятность того, что человек, заболевший краснухой, был вакцинирован?

31. Некоторое заболевание, встречающееся у 5% населения, с трудом поддается диагностике. Один грубый тест на это заболевание дает положительный результат (указывает на наличие заболевания) в 60% случаев, когда пациент действительно болен, и в 30% случаев, когда у пациента этого заболевания нет. Пусть для конкретного пациента этот тест дает положительный результат. Какова вероятность того, что у него есть данное заболевание?

32. Пациенты разбиты на две группы одинаковой численности. Одна группа придерживалась специальной диеты с высоким содержанием ненасыщенных жиров, а контрольная группа питалась по обычной диете, богатой насыщенными жирами. После 10 лет пребывания на этих диетах возникновение сердечно-сосудистых заболеваний в группах составило соответственно 31% и 48%. Случайно выбранный из обследуемых человек страдает сердечно-сосудистым заболеванием. Какова вероятность того, что он принадлежит к контрольной группе?

33. Установлено, что курящие мужчины в возрасте свыше 40 лет умирают от рака легких в 10 раз чаще, чем некурящие. Предположим, 60% мужчин курят. Найдите вероятность того, что мужчина, умерший от рака легких, был курящим.

34. Установлено, что в среднем один из 700 детей мужского пола рождается с лишней Y-хромосомой и что среди таких детей крайне агрессивное поведение встречается в 20 раз чаще. Опираясь на эти данные, представьте, что у мальчика крайне агрессивное поведение. Какова вероятность того, что ребенок имеет лишнюю Y-хромосому?

35. На одном производстве было установлено, что 3% рабочих являются алкоголиками с показателем прогулов втрое выше, чем у остальных. Если случайно выбранный рабочий отсутствует на работе, то какова вероятность того, что он алкоголик?

ГЛАВА V
ДИСКРЕТНЫЕ И НЕПРЕРЫВНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

§ 5.1. Случайные величины

В математике величина – это общее название различных количественных характеристик предметов и явлений. Длина, площадь, температура, давление и т.д. – примеры разных величин.

Случайной величиной называется переменная величина, которая в зависимости от исхода испытания случайно принимает одно значение из множества возможных значений.

Существует более строгое формальное математическое определение случайной величины.

Случайной величиной будем называть любую функцию, определенную на пространстве элементарных событий, вместе с информацией о том, с какими вероятностями эта функция принимает свои значения (или интервалы своих значений).

Примерами случайных величин являются: число больных на приеме у врача, количество рецептов, поступивших в аптеку в течение рабочего дня, продолжительность человеческой жизни и др.

Случайные величины обозначают прописными буквами латинского алфавита X, Y, Z,…, а их возможные значения – соответствующими строчными буквами x, y, z, …

Вероятности случайных величин обозначают буквами с соответствующими индексами: $P(X = x_1) = P(x_1) = P_1$ и т.д.

Различают **дискретные** и **непрерывные** случайные величины.

Случайная величина называется **дискретной**, если она принимает только определенные, отдельные друг от друга значения, которые можно установить и перечислить.

Примерами дискретной случайной величины являются:

– число студентов в аудитории;

– цифра, которая появляется на верхней грани при бросании игральной кости, которая может принимать лишь целые значения от 1 до 6;

– относительная частота попадания в цель при 10 выстрелах – ее значения: 0; 0,1; 0,2; …, 1;

– число событий, происходящих за одинаковые промежутки времени: частота пульса, число вызовов скорой помощи за 1 час, количество операций в месяц с летальным исходом и т.д.

Случайная величина называется **непрерывной**, если она может принимать любые значения внутри определенного интервала, конечного или бесконечного.

К непрерывным случайным величинам относятся, например, масса тела и рост взрослых людей, объем мозга, продолжительность жизни, количественное содержание ферментов у здоровых людей, размеры форменных элементов крови, pH крови и т.д.

Понятие случайной величины играет определяющую роль в современной теории вероятностей, разработавшей специальные приемы перехода от случайных событий к случайным величинам.

Если случайная величина зависит от времени, то можно говорить о случайном процессе.

§ 5.2. Закон распределения дискретной случайной величины

Чтобы дать полную характеристику дискретной случайной величины, необходимо указать все ее возможные значения и их вероятности.

Соответствие между возможными значениями дискретной случайной величины и их вероятностями называется **законом распределения** этой величины.

Обозначим возможные значения случайной величины X через x_i, а соответствующие им вероятности – через p_i. Тогда закон распределения дискретной случайной величины можно задать тремя способами: в виде таблицы, графика или формулы.

В таблице, которая называется **рядом распределения**, перечисляются все возможные значения дискретной случайной величины X и соответствующие этим значениям вероятности p:

X	x_1	x_2	$\ldots$	x_i	$\ldots$	x_n
p	p_1	p_2	$\ldots$	p_i	$\ldots$	p_n

При этом сумма всех вероятностей p_i должна быть равна единице (условие нормировки):

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1.$$

Графически закон представляется ломаной линией, которую принято называть **многоугольником распределения** (рис.5.1).

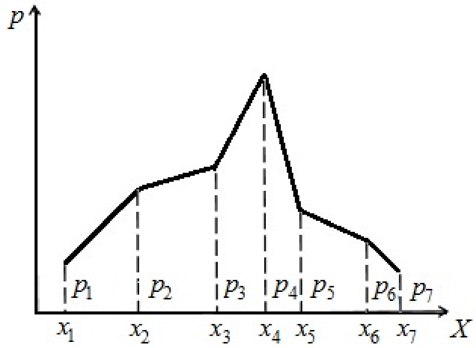


Рис.5.1

Здесь по оси абсцисс откладывают все возможные значения случайной величины x_i, а по оси ординат – соответствующие им вероятности p_i. Полученные точки соединяют отрезками прямых.

Аналитически закон выражается формулой. Например, если вероятность попадания в цель при одном выстреле равна p, то вероятность поражения цели один раз при n выстрелах выражается формулой: $P(n) = nq^{n-1}p$, где $q = 1 - p$ – вероятность промаха при одном выстреле.

Пример 5.1. В денежной лотерее выпушено 100 билетов. Разыгрывается один выигрыш в 50 рублей и 10 выигрышей по 1 рублю. Найти закон распределения случайной величины *X* – стоимости возможного выигрыша для владельца одного лотерейного билета.

Решение.

Возможные значения для *X*: $x_1 = 50$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$. Вероятности этих значений:

$$p_1 = \frac{1}{100} = 0{,}01, \qquad p_2 = \frac{10}{100} = 0{,}1,$$

$$p_3 = 1 - (p_2 + p_1) = 1 - (0{,}01 + 0{,}1) = 0{,}89.$$

Закон распределения выигрыша задан в виде таблицы:

X	50	1	0
p	0,01	0,1	0,89

Контроль: $0{,}01 + 0{,}1 + 0{,}89 = 1$.

§ 5.3. Числовые характеристики дискретных случайных величин

Полную характеристику дискретных и непрерывных случайных величин можно получить, зная законы их распределения. Однако во многих практически значимых ситуациях пользуются так называемыми

числовыми характеристиками случайных величин. Главное назначение этих характеристик – выразить в сжатой форме наиболее существенные особенности распределения случайных величин. Важно, что данные параметры представляют собой конкретные (постоянные) значения, которые можно оценивать с помощью полученных в опытах данных.

В теории вероятностей и математической статистике используется достаточно много различных характеристик, но мы рассмотрим только наиболее употребляемые.

Рассмотрим **характеристики положения** – математическое ожидание и моду. Они характеризуют положение случайной величины на числовой оси, т. е. указывают некоторое ее ориентировочное значение, около которого группируются все другие возможные значения случайной величины. Среди них важнейшую роль играет математическое ожидание $M(X)$.

Математическим ожиданием $M(X)$ дискретной случайной величины X называется сумма произведений всех возможных значений величины X на вероятности этих значений:

$$M(X) = \mu = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \,.$$

Отметим, что при большом числе испытаний среднее арифметическое наблюдаемых значений случайной величины приближается к ее математическому ожиданию.

$$M(X) \approx \overline{X} \,.$$

Замечание. Математическое ожидание случайной величины есть величина неслучайная.

Математическое ожидание случайной величины X называют **центром распределения** или, еще чаще**, средним значением**. Название «центр распределения» введено по аналогии с названием «центр тяжести». Если на оси OX в точках с абсциссами $x_1, x_2, \ldots, x_n$ помещены массы $p_1, p_2, \ldots, p_n$, то абсцисса центра тяжести

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i p_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i} \,.$$

Учитывая, что $M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$ и $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, получим $x_C = M(X)$, т.е. математическое ожидание равно абсциссе центра тяжести системы материальных точек, абсциссы которых равны возможным значениям случайной величины, а массы – их вероятностям.

Физический смысл математического ожидания как характеристики положения центра распределения можно проиллюстрировать рядом примеров. Так, при многократных измерениях некоторой величины в одних и тех же условиях математическое ожидание можно рассматривать как «истинное» значение этой величины. При наблюдении колебаний массы отдельных таблеток, изготовленных на фармацевтическом заводе, математическое ожидание имеет смысл массы, на которую настроена таблеточная машина.

Свойства математического ожидания дискретной случайной величины

1. Математическое ожидание постоянной величины C равно этой постоянной, т.е.

$$C = \text{const}, \ M(C) = C.$$

Постоянную C можно рассматривать как дискретную случайную величину, принимающую лишь одно значение C с вероятностью $p = 1$. Поэтому $M(C) = C \cdot 1 = C$.

2. Постоянный множитель C можно выносить за знак математического ожидания, т.е

$$M(CX) = C\,M(X).$$

3. Математическое ожидание алгебраической суммы случайных величин равно алгебраической сумме их математических ожиданий, т.е.

$$M(X \pm Y) = M(X) \pm M(Y).$$

4. Математическое ожидание произведения независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий, т.е.

$$M(XY) = M(X) \cdot M(Y).$$

5. Если производится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A постоянна и равна p, тогда математическое ожидание $M(X)$ числа появления события A в n независимых испытаниях $M(X) = np$.

Пример 5.2. Найти математическое ожидание случайной величины $Z = X + 2Y$, если известны математическое ожидания случайных величин X и Y: $M(X) = 5$, $M(Y) = 3$.

Решение.

Используя свойства 2 и 3 математического ожидания получаем:

$$M(Z) = M(X + 2Y) = M(X) + M(2Y) = M(X) + 2M(Y) = 5 + 2 \cdot 3 = 11.$$

Модой $Mo(X)$ дискретной случайной величины называют ее наиболее вероятное значение (рис. 5.2).

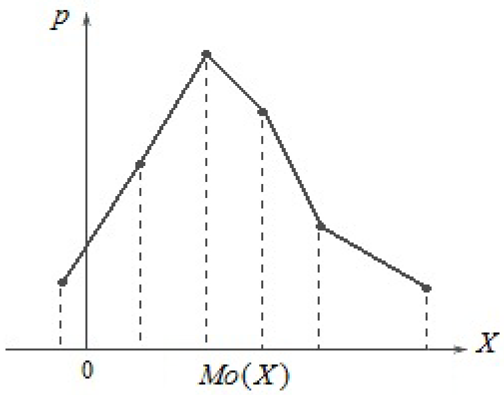


Рис. 5.2

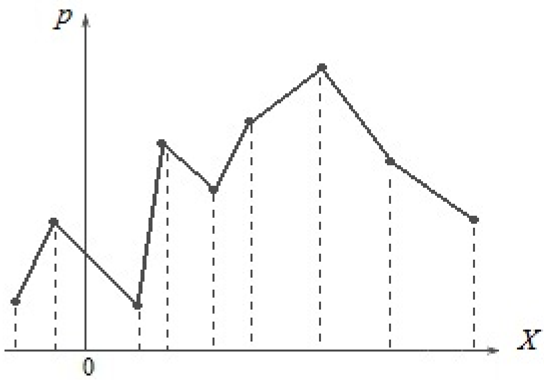


Рис. 5.3

Если многоугольник распределения имеет более одного максимума, распределение называется **полимодальным** (рис. 5.3).

Пример 5.3. Пусть дана случайная величина *X* с известным законом распределения, заданным следующей таблицей:

X	0	1	2	3	4
p	0,1	0,2	0,4	0,1	0,2

Из этой таблице видно, что мода случайной величины *X* равна 2, так как этому значению соответствует наибольшая вероятность $P(2) = 0{,}4$.

При составлении годичного плана потребности населения в каком-то лекарственном препарате определяют не ее математическое ожидание, а моду, т.е. месяц, в котором чаще всего требуется данный препарат.

В микробиологии для закона распределения вероятностей появления колонии микроорганизмов в пробах также определяют обычно не математическое ожидание, а моду, т.е. пробу, которой соответствует наибольшая вероятность появления колонии микроорганизмов.

В медицине знание среднего возраста детей, заболевших ангиной, менее интересно, чем знание возраста, в котором чаще всего происходит заболевание (в частности, при решении вопроса о том, где должны быть сосредоточены главные профилактические условия: в школах или дошкольных учреждениях).

Кроме характеристик положения – средних, типичных значений случайной величины, – употребляется еще ряд характеристик, каждая из которых описывает то или иное свойство распределения.

Характеристики рассеяния – это дисперсия и стандартное отклонение (среднее квадратическое отклонение).

Дисперсией $D(X)$ дискретной случайной величины называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины X от ее математического ожидания μ:

$$D(X) = \sigma^2 = M((X - \mu)^2).$$

Свойства дисперсии дискретной случайной величины

1. Дисперсия дискретной случайной величины X равна разности между математическим ожиданием квадрата величины X и квадратом ее математического ожидания:

$$D(X) = \sigma^2 = M(X^2) - [M(X)]^2.$$

2.Дисперсия постоянной величины C равна нулю: $D(C) = 0$.

3. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат:

$$D(CX) = C^2 D(X).$$

4. Дисперсия суммы двух независимых случайных величин X и Y равна сумме дисперсий этих величин:

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y).$$

5. Дисперсия разности двух независимых случайных величин X и Y равна сумме их дисперсий:

$$D(X - Y) = D(X) + D(Y).$$

6. Дисперсия числа появления события A в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность события A постоянна, равна произведению числа испытаний на вероятности появления и непоявления события в одном испытании: $D(X) = npq$.

Следствие. $D(X \pm C) = D(X) + D(C) = D(X) + 0 = D(X)$, где C – постоянная.

Пример 5.4. Найти дисперсию случайной величины $Z = 4X + 3$, если известно, что дисперсия случайной величины X равна $D(X) = 3$.

Решение.

Используя свойства дисперсии получаем:

$$D(Z) = D(4X + 3) = D(4X) + D(3) = 4^2 D(X) + 0 = 16 \cdot 3 = 48.$$

Дисперсия характеризует рассеяние, разбросанность значений случайной величины X относительно ее математического ожидания. Само слово «дисперсия» означает «рассеяние».

Однако дисперсия $D(X)$ имеет размерность квадрата случайной величины, что весьма неудобно при оценке разброса в физических, биологических, медицинских и других приложениях. Поэтому обычно пользуются параметром, размерность которого совпадает с размерностью X. Это – среднее квадратическое (стандартное) отклонение.

Средним квадратическим отклонением случайной величины называется корень квадратный из ее дисперсии:

$$\sigma = \sqrt{D(X)} = \sqrt{M((X-\mu)^2)}.$$

Приведем формулу для среднего квадратического отклонения суммы конечного числа взаимно независимых случайных величин:

$$\sigma(X_1 + X_2 + ... + X_n) = \sqrt{D(X_1) + D(X_2) + ... + D(X_n)}.$$

Пример 5.5. Закон распределения случайной величины X задан таблицей. Определить дисперсию $D(X)$.

X	1	2	5
p	0,3	0,5	0,2

Решение.

По определению $D(X) = \sigma^2 = M((X-\mu)^2)$. Вычислим математическое ожидание величины X:

$$\mu = 1\cdot 0{,}3 + 2\cdot 0{,}5 + 5\cdot 0{,}2 = 2{,}3.$$

Найдем квадраты всех возможных отклонений величины X от μ:

$$[x_1 - \mu]^2 = (1-2{,}3)^2 = 1{,}69,$$

$$[x_2 - \mu]^2 = (2-2{,}3)^2 = 0{,}09,$$

$$[x_3 - \mu]^2 = (5-2{,}3)^2 = 7{,}29.$$

Напишем закон распределения квадрата отклонения:

$[X-\mu]^2$	1,69	0,09	7,29
p	0,3	0,5	0,2

Тогда дисперсия равна:

$$D(X) = 1{,}69\cdot 0{,}3 + 0{,}09\cdot 0{,}5 + 7{,}29\cdot 0{,}2 = 2{,}01.$$

Пример 5.6. Закон распределения случайной величины X задан следующей таблицей:

X	0	1	2	3	4
p	0,13	0,35	0,35	0,15	0,02

Вычислить ее математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

Решение.

Сначала находим математическое ожидание случайной величины X:

$$M(X)=0\cdot 0{,}13+1\cdot 0{,}35+2\cdot 0{,}35+3\cdot 0{,}15+4\cdot 0{,}02=1{,}58.$$

Далее запишем закон распределения X^2:

X^2	0	1	4	9	16
P	0,13	0,35	0,35	0,15	0,02

Математическое ожидание случайной величины X^2:

$$M(X^2)=0\cdot 0{,}13+1\cdot 0{,}35+4\cdot 0{,}35+9\cdot 0{,}15+16\cdot 0{,}02=3{,}42.$$

Находим дисперсию:

$$D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2=3{,}42-1{,}58^2=0{,}92.$$

Отсюда находим среднеквадратическое отклонение

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{0{,}92}\approx 0{,}96.$$

§ 5.4. Биномиальное распределение, распределение Пуассона

Биномиальное распределение

Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых событие A может появиться, либо не появиться. Вероятность наступления события во всех испытаниях постоянна и равна p (следовательно, вероятность непоявления $q=1-p$). Рассмотрим в качестве дискретной случайной величины X число появлений события A в этих испытаниях.

Поставим перед собой задачу: найти закон распределения величины X. Для ее решения требуется определить возможные значения X и их вероятности. Очевидно, событие A в n испытаниях может либо не появиться, либо появиться 1 раз, либо 2 раза, …, либо n раз. Таким образом, возможные значения X таковы: $x_0=0$, $x_1=1$, …, $x_n=n$. Остается найти вероятности этих возможных значений, для чего достаточно воспользоваться формулой Бернулли:

$$P_n(X)=C_n^X p^X q^{n-X}.$$

Данная формула является аналитическим выражением искомого закона распределения.

Биномиальным называют распределение вероятностей, определяемое формулой Бернулли. Закон назван «биномиальным» потому, что правую часть равенства $P_n(X)=C_n^X p^X q^{n-X}$ можно рассматривать как общий член разложения бинома Ньютона:

$$(p+q)^n = C_n^n p^n + C_n^{n-1} p^{n-1} q + \ldots + C_n^k p^k q^{n-k} + \ldots + C_n^0 q^n .$$

Таким образом, первый член разложения p^n определяет вероятность наступления рассматриваемого события n раз в n независимых испытаниях; второй член $np^{n-1}q$ определяет вероятность наступления события $n-1$ раз; ... ; последний член q^n определяет вероятность того, что событие не появится ни разу.

Напишем биномиальный закон в виде таблицы:

X	n	$n-1$	$\ldots$	k	$\ldots$	0
p	p^n	$np^{n-1}q$	$\ldots$	$C_n^k p^k q^{n-k}$	$\ldots$	q^n

Математическое ожидание случайной величины, подчиняющейся биномиальному распределению, $M(X)=np$.

Дисперсия случайной величины, подчиняющейся биномиальному закону равна $D(X)=npq$.

Среднее квадратическое отклонение: $\sigma=\sqrt{npq}$.

Пример 5.7. Предполагая одинаковыми вероятности рождения мальчика и девочки, установить закон распределения случайной величины X, которая выражает число мальчиков в семье, имеющей пять детей.

Решение.

Пусть X – количество мальчиков в семье. Величина X может принимать значения 0,1,2,3,4,5. Найдем вероятности этих значений по формуле Бернулли: $P_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m}$.

$$P_5(0)=0{,}5^5=0{,}03125;$$

$$P_5(1)=\frac{5!}{4!\,1!}\cdot 0{,}5^4\cdot 0{,}5^1=0{,}15625;$$

$$P_5(2)=\frac{5!}{3!\,2!}\cdot 0{,}5^3\cdot 0{,}5^2=0{,}3125;$$

$$P_5(3)=\frac{5!}{2!\,3!}\cdot 0{,}5^2\cdot 0{,}5^3=0{,}3125;$$

$$P_5(4)=\frac{5!}{1!4!}\cdot 0{,}5^1\cdot 0{,}5^4=0{,}15625;$$

$$P_5(5)=0{,}5^5=0{,}03125.$$

Закон распределения имеет вид:

X	0	1	2	3	4	5
p	0,03125	0,15625	0,3125	0,3125	0,15625	0,03125

Контроль:

$$0{,}03125 + 0{,}15625 + 0{,}3125 + 0{,}3125 + 0{,}15625 + 0{,}03125 = 1$$

Распределение Пуассона

Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A равна p. Для определения вероятности k появлений события в этих испытаниях используют формулу Бернулли. Если же n велико, то пользуются асимптотической формулой Лапласа. Однако, эта формула непригодна, если вероятность события мала ($p < 0{,}1$). В этих случаях (n велико, p мало) прибегают к асимптотической формуле Пуассона.

Итак, поставим перед собой задачу: найти закон распределения величины X если число испытаний велико, а вероятность события очень мала. Для ее решения требуется определить возможные значения X и их вероятности. Очевидно, событие A в n испытаниях может либо не появиться, либо появиться 1 раз, либо 2 раза, …, либо n раз. Таким образом, возможные значения X таковы: $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, …, $x_n = n$. Остается найти вероятности этих возможных значений, воспользовавшись формулой Пуассона (приложение 3):

$$P_n(X) \approx \frac{\mu^X}{X!} e^{-\mu}, \qquad \text{где} \quad \mu = np.$$

Эта формула выражает **закон распределения Пуассона** вероятностей массовых (n велико) редких (p мало) событий.

Распределение Пуассона (приложение 3) является дискретным и характеризуется только одним параметром – математическим ожиданием μ. Среднее квадратическое отклонение $\sigma = \sqrt{\mu}$.

§ 5.5. Функция распределения и плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины

Для описания реальных величин, зависящих от случая, класса дискретных случайных величин, недостаточно. Действительно, таким величинам, как размеры любых физических объектов, температура, давление, длительность тех или иных биологических процессов неестественно приписывать дискретное множество возможных значений. Напротив, естественно считать, что их возможные значения в принципе могут быть любыми числами в некоторых пределах, т.е. они являются непрерывными величинами.

В отличие от дискретной величины закон распределения непрерывной случайной величины невозможно задать в виде таблицы, в которой были бы перечислены все возможные значения этой величины и их вероятности.

Одним из возможных способов задания непрерывной случайной величины является использование с этой целью соответствующей функции распределения.

Функцией распределения случайной величины X называют функцию $F(x)$, равную вероятности $P(X < x)$ того, что случайная величина примет значение X, меньшее x:

$$F(x) = P(X < x)$$

Функцию распределения иногда называют **интегральной функцией распределения** или **интегральным законом распределения**.

Геометрически равенство $F(x) = P(X < x)$ можно истолковать так: $F(x)$ есть вероятность того, что случайная величина примет значение, которое изображается на числовой оси интервалом $(-\infty, x)$ (рис. 5.4)

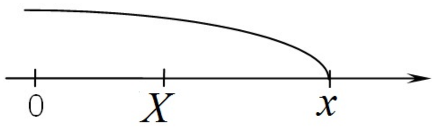


Рис. 5.4

Функция распределения полностью характеризует случайную величину с вероятностной точки зрения, т.е. является одной из форм закона распределения. Она существует для всех случайных величин, как дискретных, так и непрерывных.

Свойства функции распределения

1. Значения функции распределения принадлежат отрезку $[0,1]$:

$$0 \le F(x) \le 1.$$

Это свойство вытекает из определения функции распределения как вероятности: вероятность всегда вероятность есть неотрицательное число, не превышающее единицы ($0 \le P \le 1$).

2. Функция распределения является неубывающей функцией, т.е. из неравенства $x_2 > x_1$ следует неравенство $F(x_2) > F(x_1)$,

$$P(x_1 \le X < x_2) = F(x_2) - F(x_1) \ge 0.$$

Следствие 1. Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет одно определенное значение, равна нулю:

$$P(X = a) = 0.$$

Так, вероятность того, что наугад выбранная таблетка будет иметь массу, в точности равную некоторому фиксированному значению, например 0,20 г, равна нулю.

3. Если возможные значения случайной величины принадлежат интервалу (a,b), то: 1) $F(x)=0$ при $x \le a$; 2) $F(x)=1$ при $x \ge b$.

Следствие 2. Справедливы равенства:

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = F(-\infty) = 0; \qquad \lim_{x\to+\infty} F(x) = F(+\infty) = 1.$$

Данные свойства позволяют представить, как выглядит график функции распределения непрерывной случайной величины.

График функции распределения непрерывной случайной величины расположен в полосе, ограниченной прямыми линиями $y=0$ и $y=1$ (первое свойство).

При возрастании x в интервале (a,b), в котором заключены все возможные значения случайной величины, график «поднимается вверх» (второе свойство).

При $x \le a$ ординаты графика равны нулю; при $x \ge b$ ординаты графика равны единице (третье свойство).

В общем случае он имеет вид, изображенный на рисунке 5.5.

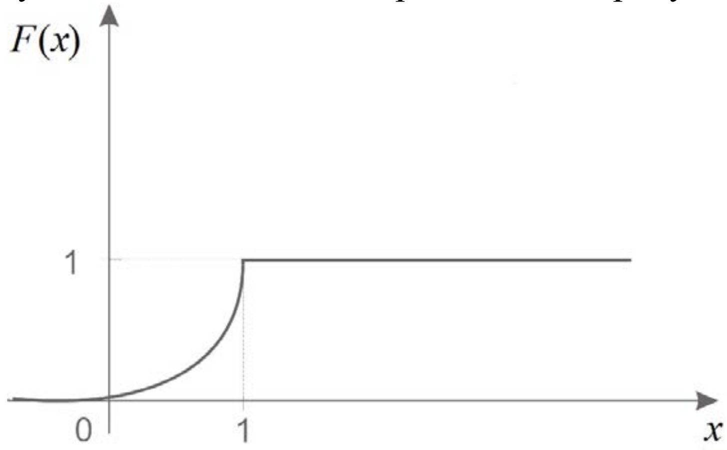


Рис. 5.5

Для дискретной случайной величины функция распределения $F(x) = \sum_{x_i<x} P(X = x_i)$, где неравенство $x_i < x$ под знаком суммы указывает, что суммирование распространяется на все значения x_i, меньшие x.

В точках возможных значений дискретной случайной величины X функция распределения меняется скачкообразно, причем величина скачка равна вероятности этого значения.

Пример 5.8. Дан ряд распределения дискретной случайной величины:

X	2	3	5	6	8
p	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

Построить функцию распределения вероятностей этой случайной величины X.

Решение.

Если $x \le 2$, то $F(x) = P(X < x) = 0$;

если $2 < x \le 3$, то $F(x) = P(X < x) = 0{,}1$;

если $3 < x \le 5$, то $F(x) = P(X < x) = 0{,}1 + 0{,}2 = 0{,}3$;

если $5 < x \le 6$, то $F(x) = P(X < x) = 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}4 = 0{,}7$;

если $6 < x < 8$, то $F(x) = P(X < x) = 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}4 + 0{,}2 = 0{,}9$;

если $x > 8$, то $F(x) = P(X < x) = 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}4 + 0{,}2 + 0{,}1 = 1$.

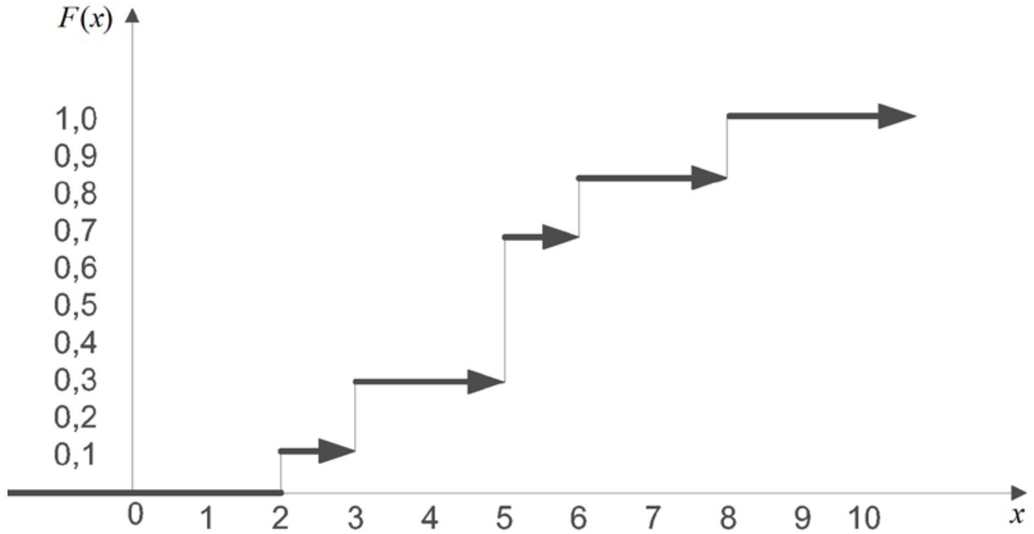


Рис. 5.6

График функции распределения вероятностей случайной величины X изображен на рисунке 5.6, концы стрелок указывают на точки, не принадлежащие графику.

Выше непрерывная случайная величина задавалась при помощи функции распределения. Этот способ задания не является единственным. Непрерывную случайную величину иногда можно также задать, используя другую функцию, которую называют плотностью распределения или плотностью вероятности (часто ее называют дифференциальной функцией распределения).

Плотностью распределения вероятностей непрерывной случайной величины X называют функцию $f(x)$, равную первой производной от интегральной функции распределения:

$$f(x) = F'(x).$$

Из приведенного определения следует, что функция распределения является первообразной для плотности распределения.

Заметим, что для описания распределения вероятностей дискретной случайной величины дифференциальная функция неприменима.

Свойства плотности распределения вероятностей

1. Вероятность того, что непрерывная случайная величина X в результате испытания примет значение, принадлежащее интервалу (a,b), равна определенному интегралу от плотности вероятности, взятому в пределах от a до b:

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Геометрически полученный результат можно истолковать так: вероятность того, что непрерывная случайная величина примет значение, принадлежащее интервалу (a,b), равна площади криволинейной трапеции, ограниченной осью Ох, кривой распределения $f(x)$ и отрезками прямых $x = a$ и $x = b$ (рис. 5.7). Это следует из геометрического смысла определенного интеграла.

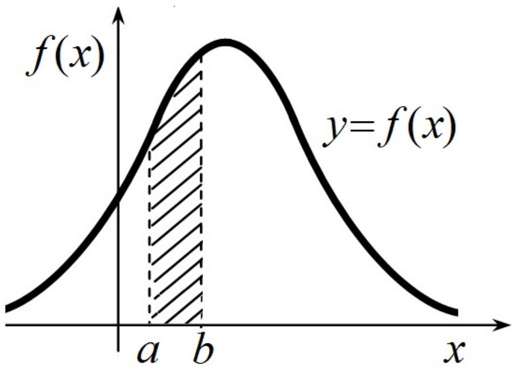


Рис. 5.7

Следствие 1. Если известна функция $f(x)$, то, изменяя пределы интегрирования a на $-\infty$ и b на x, получим:

$$\int_{-\infty}^{x} f(x)dx = F(x) - F(-\infty) = F(x) - 0 = F(x).$$

Следствие 2. Несобственный интеграл от плотности вероятности в пределах от $-\infty$ до $+\infty$ равен единице:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

Данное равенство называется **условием нормировки** плотности вероятностей.

Если все значения X лежат в интервале (a,b), то условие нормировки можно записать в виде:

$$\int_a^b f(x)dx = 1.$$

2. Плотность вероятности – неотрицательная функция: $f(x) \geq 0$.

Пример 5.9. Для плотности вероятности случайной величины X

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 & \text{при} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{при} \quad x < 0 \quad \text{или} \quad x > 1 \end{cases}$$

найти коэффициент a и вероятность попадания случайной величины X в интервал $\left(0; \dfrac{1}{4}\right)$.

Решение.

Так как все значения данной случайной величины принадлежат интервалу $(0;1)$, то, согласно условию нормировки, плотность распределения

$$\int_0^1 ax^2 dx = 1, \qquad \left.\frac{ax^3}{3}\right|_0^1 = 1, \qquad \frac{a}{3} = 1, \quad \text{откуда} \quad a = 3.$$

Вероятность того, что X примет значение из заданного интервала, равна приращению функции распределения вдоль этого интервала, т.е.

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a).$$

В нашем случае $a = 0$ и $b = \dfrac{1}{4}$, поэтому

$$F(x) = \int 3x^2 dx = \frac{3x^3}{3} = x^3,$$

$$P\left(0 < X < \frac{1}{4}\right) = F\left(\frac{1}{4}\right) - F(0) = \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}.$$

§ 5.6. Характеристики распределения непрерывных случайных величин

Под основными числовыми характеристиками непрерывной случайной величины понимают, как и в случае дискретной случайной величины, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

Как и для дискретной величины, математическое ожидание представляет собой среднее значение этой величины, а дисперсия и среднее квадратическое отклонение являются усредненными характеристиками степени разброса возможных значений этой величины относительно ее математического ожидания.

Однако формулы, определяющие математическое ожидание $M(X)=\mu$ и дисперсию $D(X)=\sigma^2$ непрерывной случайной величины, отличаются от соответствующих формул для дискретной величины.

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины X, возможные значения которой принадлежат отрезку $[a,b]$, называют величину определенного интеграла:

$$M(X)=\mu=\int_a^b xf(x)dx,$$

где $f(x)$ – плотность вероятности случайной величины X.

Если возможные значения принадлежат всей оси Ox, то

$$M(X)=\mu=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

Математическое ожидание называют **центром распределения вероятностей** случайной величины X.

По аналогии с дисперсией дискретной величины определяется и дисперсия непрерывной величины.

Дисперсией непрерывной случайной величины X, возможные значения которой принадлежат отрезку $[a,b]$, называют величину определенного интеграла

$$D(X)=\sigma^2=\int_a^b (x-\mu)^2 f(x)dx,$$

где μ – математическое ожидание, $f(x)$ – плотность вероятности случайной величины.

Если возможные значения X принадлежат всей оси Ox, то

$$D(X)=\sigma^2=\int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx$$

Среднее квадратическое отклонение непрерывной случайной величины определяется, как и для величины дискретной, равенством

$$\sigma=\sqrt{D(X)}.$$

Замечание 1. Свойства математического ожидания и дисперсии дискретных величии сохраняются и для непрерывных величин.

Замечание 2. Для вычисления дисперсии более удобны формулы:

$$D(X)=\sigma^2=M(X^2)-\left[M(X)\right]^2,$$

$$D(X)=\int_a^b x^2 f(x)dx-\left[M(X)\right]^2,$$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - \left[M(X)\right]^2 .$$

§ 5.7. Равномерное и нормальное распределения случайной величины. Понятие о теореме Ляпунова

Равномерное распределение случайной величины

Распределение вероятностей называют **равномерным**, если на интервале (a,b), которому принадлежат все возможные значения непрерывной случайной величины, плотность вероятности сохраняет постоянное значение, а вне этого отрезка равна нулю.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le a, \\ C & \text{при} \quad a < x \le b, \\ 0 & \text{при} \quad x > b. \end{cases}$$

График плотности вероятности равномерно распределенной случайной величины приведен на рисунке 5.8.

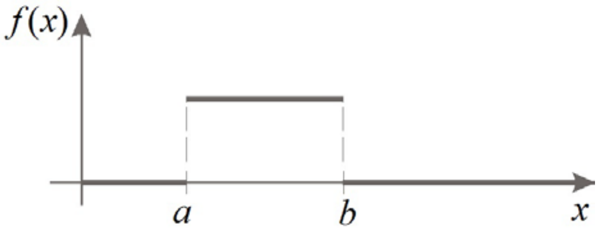


Рис.5.8

Найдем плотность равномерного распределения $f(x)$, считая, что все возможные значения случайной величины заключены в интервале (a,b), на котором функция $f(x)$ сохраняет постоянное значение $f(x) = C$.

По условию, X не принимает значений вне интервала (a,b), поэтому $f(x) = 0$ при $x < a$ и $x > b$.

Найдем значение постоянной C. Так как все возможные значения случайной величины принадлежат интервалу (a,b), то должно выполняться соотношение

$$\int_a^b f(x)dx = 1, \quad \text{или} \quad \int_a^b Cdx = 1, \quad \text{отсюда} \quad C = \frac{1}{b-a}.$$

Таким образом, для равномерно распределенной случайной величины X, возможные значения которой принадлежат интервалу (a,b) (рис. 5.8), плотность вероятности имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x<a, \\ \dfrac{1}{b-a} & \text{при} \quad a<x<b, \\ 0 & \text{при} \quad x>b. \end{cases}$$

Функция распределения случайной величины X с плотностью вероятности $f(x)$ имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x<a, \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{при} \quad a<x<b, \\ 1 & \text{при} \quad x>b. \end{cases}$$

График функции $F(x)$ изображен на рисунке 5.9.

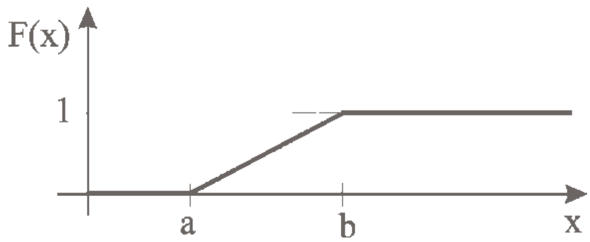


Рис.5.9

Основные числовые характеристики равномерно распределенной непрерывной случайной величины равны:

Математическое ожидание $M(X)=\dfrac{a+b}{2}$,

Дисперсия $D(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}$,

Среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)=\dfrac{b-a}{2\sqrt{3}}$.

Нормальное распределение случайной величины

Нормальный закон распределения (закон Гаусса) играет исключительно важную роль в теории вероятностей. Во-первых, это наиболее часто встречающийся на практике закон распределения непрерывных случайных величин. Во-вторых, он является предельным законом в том смысле, что к нему при определенных условиях приближаются другие законы распределения.

Закон распределения вероятностей непрерывной случайной величины X называют нормальным, если плотность вероятности определяется формулой

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

где x – значение случайной величины X; μ и σ – математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение.

Из формулы видно, что если случайная величина распределена по нормальному закону, то достаточно знать только два числовых параметра – μ и σ, чтобы полностью знать закон ее распределения.

График функции $f(x)$ называется **нормальной кривой распределения** или **кривой Гаусса**. Он имеет симметричный вид относительно ординаты $x = \mu$.

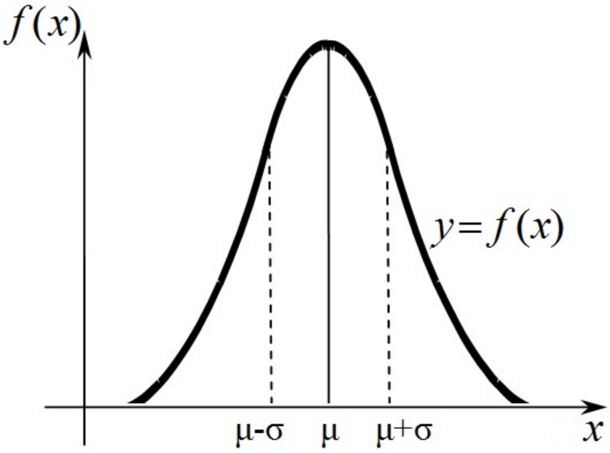


Рис. 5.10

Максимальное значение плотности вероятности, равное $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \approx \frac{0,4}{\sigma}$, соответствует математическому ожиданию $\mu = \overline{X}$; по мере удаления точки x от μ значение плотности $f(x)$ приближается к нулю (рис. 5.10).

Величина μ называется также центром рассеяния. Среднее квадратическое отклонение σ характеризует ширину кривой распределения.

Установим, как влияют параметры μ и σ на форму кривой Гаусса. При изменении значения μ нормальная кривая не меняется по форме, но сдвигается вдоль оси абсцисс (рис. 5.11). Параметр σ определяет форму кривой нормального распределения. С возрастанием σ максимальная ордината кривой убывает, а сама кривая, становясь более пологой, растягивается вдоль оси абсцисс; при уменьшении σ кривая вытягивается вверх, одновременно сжимаясь с боков. Вид кривой распределения при разных значениях σ $(\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3)$ показан на рисунке 5.12.

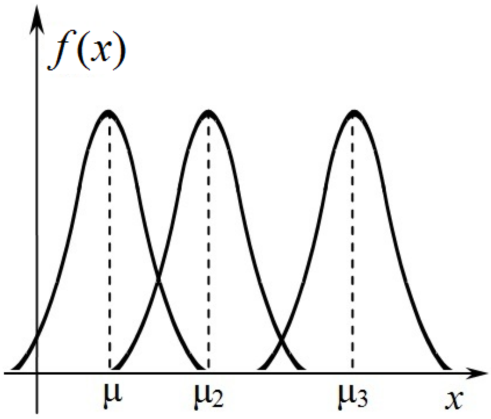


Рис. 5.11

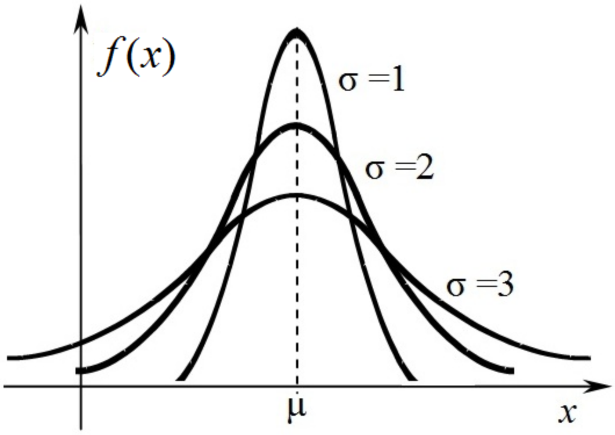


Рис. 5.12

Естественно, что при любых значениях μ и σ площадь, ограниченная нормальной кривой и осью X, остается равной 1 (условие нормировки):

$$\int_a^b f(x)dx = 1 \qquad \text{или} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

Вероятность попадания значений случайной величины X в интервал (x_1, x_2), т.е. $P(x_1 < X < x_2)$, равна:

$$P(x_1 < X < x_2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

или

$$P(x_1 < X < x_2) = \Phi\left(\frac{x_2 - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - \mu}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(x)$ – функция Лапласа (приложение 6).

На практике часто приходиться вычислять вероятности попадания значений нормально распределенной случайной величины на участки, симметричные относительно μ. В частности, рассмотрим следующую, важную в прикладном отношении задачу. Отложим от μ вправо и влево отрезки, равные σ, 2σ и 3σ (рис. 5.13) и проанализируем результат вычисления вероятности попадания X в соответствующие интервалы:

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = 0{,}6827 = 68{,}27\%;$$

$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) = 0{,}9545 = 95{,}45\%;$$

$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) = 0{,}9973 = 99{,}73\%.$$

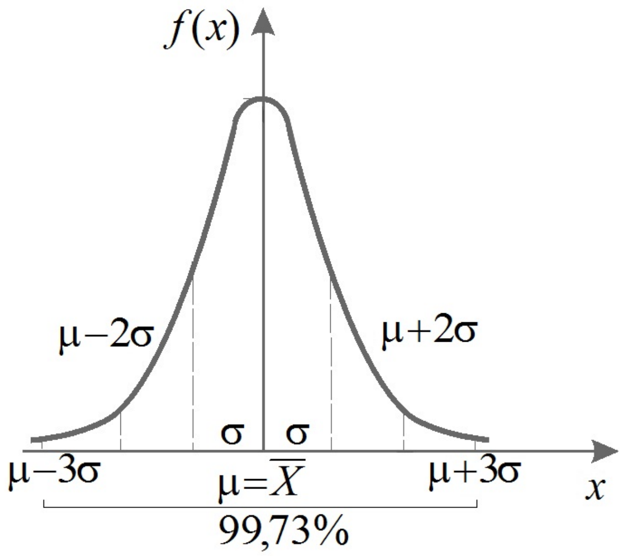


Рис. 5.13

Из последнего неравенства следует: практически достоверно, что значения нормально распределенной случайной величины X с параметрами μ и σ лежат в интервале $\mu \pm 3\sigma$. Иначе говоря, зная $\mu = \overline{X}$ и σ, можно указать интервал, в который с вероятностью P = 99,73% попадают значения данной случайной величины. Такой способ оценки диапазона возможных значений X известен как **«правило трех сигм»**.

Другими словами, вероятность того, что абсолютная величина отклонения превысит утроенное среднее квадратическое отклонение, очень мала, а именно равна 0,0027. Это означает, что лишь в 0,27% случаев так может произойти. Такие события, исходя из принципа невозможности маловероятных событий, можно считать практически невозможными. В этом и состоит сущность правила трех сигм: если случайная величина распределена нормально, то абсолютная величина ее отклонения от математического ожидания не превосходит утроенного среднего квадратического отклонения.

На практике правило трех сигм применяется так: если распределение изучаемой случайной величины неизвестно, но условие, указанное в приведенном правиле, выполняется, то имеются основания предполагать, что изучаемая величина распределена нормально; в противном случае она не распределена нормально.

Пример 5.10. Известно, что для здорового человека pH крови является нормально распределенной величиной со средним значением (математическим ожиданием) 7,4 и стандартным отклонением 0,2. Определите диапазон значений этого параметра.

Решение.

Для ответа на данный вопрос воспользуемся «правилом трех сигм»; с вероятностью, равной 99,73%, можно утверждать, что диапазон значений pH для здорового человека составляет [6,8; 8].

Пример 5.11. Случайная величина X подчинена нормальному закону с математическим ожиданием $\mu = 375$ и средним квадратическим отклонением $\sigma = 25$. Найти вероятность того, что значение этой случайной величины будет заключено в пределах от 300 до 425.

Решение.

Запишем вначале закон распределения. Общая формула имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}.$$

Подставляя $\mu = 375$ и $\sigma = 25$, после вычислений:

$$f(x) = \frac{1}{25\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-375)^2}{1250}}.$$

Вероятность того, что X примет значение из интервала $x_1 < X < x_2$, имеет вид:

$$P(x_1 < X < x_2) = \Phi\left(\frac{x_2 - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - \mu}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-x^2/2} dx$ – функция Лапласа. Эта функция определяется с помощью таблиц. В нашем случае:

$$P(300 < X < 425) = \Phi\left(\frac{425 - 375}{25}\right) - \Phi\left(\frac{300 - 375}{25}\right) = \Phi(2) - \Phi(-3) = \Phi(2) + \Phi(3)$$

.

По таблице находим: $\Phi(2) = 0{,}4772;\ \Phi(3) = 0{,}49865$, следовательно:

$$P(300 < X < 425) = 0{,}4772 + 0{,}49865 = 0{,}97585.$$

Нормально распределенные случайные величины широко встречаются в природе, на практике. Выдающимся русским математиком А.М. Ляпуновым была доказана центральная предельная теорема теории вероятностей, из которой вытекает следующее следствие: если случайная величина представляет собой сумму очень большого числа взаимно независимых случайных величин, влияние каждой из которых на всю сумму ничтожно мало, то эта случайная величина имеет распределение, близкое к нормальному.

Понятие о теореме Ляпунова

В теории вероятностей некоторые весьма общие достаточные условия для сходимости распределения суммы независимых случайных величин к нормальному закону устанавливает теорема Ляпунова.

Приведем одну из простейших форм этой теоремы.

Теорема Ляпунова. Если $X_1, X_2,...X_i,..., X_n$ – независимые случайные величины, имеющие один и тот же закон распределения с математическим ожиданием μ и дисперсией σ^2, то при неограниченном увеличении n закон распределения суммы $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ неограниченно приближается к нормальному.

Сущность теоремы Ляпунова заключается в том, что сумма n независимых случайных величин, заданных произвольными распределениями, имеет распределение, которое по мере возрастания числа n стремится к нормальному при условии, что влияние каждой случайной величины невелико по сравнению с их суммарным влиянием. Значительное число случайных явлений, встречающихся в природе, протекает именно по такой схеме. В связи с этим теорема Ляпунова имеет большое значение, а нормальный закон является одним из основных в теории вероятностей.

Например, производится измерение некоторой физической величины с помощью измерительного прибора. Любое измерение дает лишь приблизительный результат, так как на него оказывают влияние очень многие случайные факторы (изменение температуры, колебания атомов, несовершенство органов зрения наблюдателя и др.). Каждый из этих факторов порождает ничтожную частную погрешность. Поскольку число факторов очень велико, совокупное их влияние дает уже заметную суммарную погрешность. Рассматривая суммарную погрешность как сумму очень большого числа взаимно независимых частных погрешностей, мы можем заключить, что суммарная погрешность будет иметь распределение вероятностей, близкое к нормальному. Опыт подтверждает справедливость такого заключения.

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение случайной величины.
2. Какую случайную величину называют дискретной? непрерывной? Приведите примеры.
3. Что называют рядом распределения дискретной случайной величины? Как еще можно задать закон распределения дискретной случайной величины?
4. Что называют математическим ожиданием дискретной случайной величины?
5. Перечислите свойства математического ожидания случайной величи-

ны.
6. Что называют дисперсией случайной величины?
7. Перечислите свойства дисперсии случайной величины.
8. Что называют средним квадратичным отклонением случайной величины?
9. Какое распределение называют биномиальным?
10. Какое распределение называют распределением Пуассона?
11. Дайте определение функции распределения вероятностей. Перечислите свойства функции распределения.
12. Как, зная функцию распределения, найти вероятность попадания случайной величины в заданный интервал?
13. Какие свойства должна иметь некоторая функция для того, чтобы она могла быть функцией распределения?
14. Дайте определение плотности распределения вероятностей. Перечислите свойства плотности распределения. Существует ли плотность распределения у дискретной случайной величины?
15. Как, зная плотность распределения, найти вероятность попадания случайной величины в заданный интервал?
16. Чем различаются графики функций распределения дискретной и непрерывной случайных величин?
17. Что называют математическим ожиданием непрерывной случайной величины?
18. Что называют дисперсией непрерывной случайной величины?
19. Какое распределение называют равномерным?
20. Какое распределение называют нормальным?

Задания для решения

1. Задают ли закон распределения дискретной случайной величины следующие таблицы?

X	1	2	3	4
p	0,1	0,2	0,3	0,5

X	5	6	7	8
p	0,2	0,4	0,1	0,3

2. Дискретная случайная величина X имеет закон распределения:

X	3	4	5	6	7
p	p_1	0,15	p_3	0,25	0,35

а) Найдите вероятности $p_1 = P(X = 3)$ и $p_3 = P(X = 5)$, если известно, что p_3 в 4 раза больше p_1.

б) Получив ответ на первый вопрос, постройте многоугольник распределения.

3. Случайная величина X задана законом распределения

X	2	3	10
p	0,1	0,4	0,5

Найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$. Построить многоугольник распределения.

4. Найти дисперсию случайной величины X, зная закон ее распределения. Построить многоугольник распределения.

X	0,1	2	10	20
p	0,4	0,2	0,15	0,25

5. Дискретная случайная величина X имеет закон распределения

X	0,2	0,4	0,6	0,8	1
p	0,1	0,2	0,4	P_4	0,1

Чему равна вероятность $P_4(X = 0{,}8)$? Построить многоугольник распределения. Найти математическое ожидание и дисперсию.

6. Закон распределения случайной величины X задан следующей таблицей:

X	0	1	2	3	4
p	0,13	0,35	0,35	0,15	0,02

Вычислить ее математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

7. Число α-частиц, достигающих счетчика в некотором опыте за равные промежутки времени, является случайной величиной, распределенной по закону, заданному следующей таблицей:

α	p	α	p	α	p	α	p
0	0,021	3	0,201	6	0,097	9	0,011
1	0,081	4	0,195	7	0,054	10	0,007
2	0,156	5	0,151	8	0,026		

Найти: 1) математическое ожидание и дисперсию числа частиц, достигающих счетчика; 2) вероятность того что число частиц, достигающих счетчика, будет не меньше четырех.

8. Медсестра обслуживает трех больных. Вероятность того, что каждому больному в течение часа потребуется внимание сестры, равна 0,4. Построить функцию распределения числа вызовов медсестры в течение часа.

9. По оценкам, в городе N происходит в среднем одно рождение в час. Какова вероятность того, что за данный час: 1) не произойдет ни одного рождения; 2) произойдет более двух рождений?

10. Для функции распределения непрерывной случайной величины

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<0\\ ax^2 & \text{при } 0<x<2\\ 1 & \text{при } x>2\end{cases}$$

Найти коэффициент а и плотность вероятности случайной величины X. Вычислить вероятность попадания случайной величины X в интервале $(0;1)$.

11. Случайная величина задана интегральной функцией. Найти дифференциальную функцию (плотность вероятности).

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } \mathrm{x}<0\\ \frac{1}{2}(1-\cos\mathrm{x}) & \text{при } 0<\mathrm{x}<\pi\\ 1 & \text{при } \mathrm{x}>\pi\end{cases}$$

12. Случайная величина задана интегральной функцией:

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<-1\\ \frac{1}{3}x+\frac{1}{3} & \text{при } -1<x<2\\ 1 & \text{при } x>2\end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное на отрезке $[0;1]$.

13. Случайная величина задана дифференциальной функцией:

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<0\\ \frac{1}{2}\sin x & \text{при } 0<x<\pi\\ 0 & \text{при } x>\pi\end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания случайная величина примет значение, заключенное в интервале $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$.

14. Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины X в интервале $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ равна $f(x)=\frac{2}{\pi}\cos^2 x$, вне этого интервала $f(x)=0$. Найти вероятность того, что в двух независимых

испытаниях X примет ровно два раза значение, заключенное в интервале $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

15. Для плотности вероятности случайной величины X $f(x) = C\sin^2 x \quad (0 \le x \le 2\pi)$ определить параметр C.

16. Случайная величина X подчинена нормальному закону с математическим ожиданием $\mu = 375$ и средним квадратическим отклонением $\sigma = 25$. Найти вероятность того, что значение этой случайной величины будет заключено в пределах от 300 до 425.

17. Плотность вероятности случайной величины X задана выражением $f(x) = a\mathrm{e}^{-\frac{(x-5)^2}{8}}$. Найти коэффициент a и определить вероятность того, что в результате опыта случайная величина X отклонится от своего математического ожидания не более чем на 1,5.

18. Случайная величина X подчиняется нормальному закону распределения с математическим ожиданием 30 и дисперсией 10. Найти вероятность того, что значение случайной величины заключено в интервале $(10;50)$.

19. Среди 10 000 обследованных были выявлены два человека с редким заболеванием. Какова вероятность того, что из 10 000 случайно выбранных человек ровно у двух окажется редкое заболевание?

20. Известно, что для человека pH крови является случайной величиной, имеющей нормальное распределение с математическим ожиданием $\mu = 7{,}4$ и средним квадратическим отклонением $\sigma = 0{,}2$. Найти вероятность того, что уровень pH находится между 7,35 и 7,45.

21. Вероятность того, что среди стандартных ампул имеются ампулы с дефектом, равна 0,25. Составить биномиальное распределение вероятностей бездефектных взятых наугад 6 ампул.

22. Всхожесть семян лекарственного растения оценивается вероятностью 0,9. Составить биномиальное распределение вероятностей появления всхожих семян из пяти наугад взятых.

23. Вероятность изготовления нестандартного продукта равна 0,004. Найти вероятность того, что в партии из 1000 единиц окажется 5 нестандартных.

24. Из 1000 рецептов, поступивших в аптеку, 10 оказались неправильными. Какова вероятность того, что из 300 рецептов два будут неправильными?

25. Предполагается подвергнуть испытанию на прочность 100 таблеток. Для каждой таблетки вероятность разрушения равна 0,03. Какова вероятность того, что данная таблетка при испытании разрушится?

26. На аналитических весах производится взвешивание некоторого вещества без учета систематических ошибок. Случайные погрешности

распределены по нормальному закону со средним квадратическим отклонением 2 мг. Вычислить вероятность того, что отклонение результата взвешивания от математического ожидания не превзойдет по абсолютной величине 1 мг.

27. По данным ОТК, брак при выпуске таблеток составляет 0,02. Найти вероятность того, что в серии из 1000 таблеток отклонение количества пригодных от 900 не превысит 0,05.

28. Для определения средней урожайности лекарственного растения взято на выборку по 1м^2 с каждого гектара. Известно, что дисперсия по всему участку не превышает 4 кг. Оценить вероятность того, что среднее значение урожайности от средней урожайности по всему участку отличается не более чем на 2 кг. Всего засеяно 5 га.

29. Вероятность спроса на данную лекарственную форму 0,8. Оценить вероятность того, что при 1000 обращениях в аптеку отклонение частоты спроса на данную лекарственную форму от вероятности спроса по абсолютной величине будет меньше 0,05.

30. Дисперсия данных независимых случайных величин не превышает 4. Найти число величин, при котором вероятность отклонения их среднего арифметического от среднего арифметического их математических ожиданий не более чем на 0,25 превысит 0,99.

ЧАСТЬ III
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

ГЛАВА VI
ВЫБОРОЧНЫЙ МЕТОД

§ 6.1. Генеральная и выборочная совокупности. Способы отбора

Математическая статистика – раздел прикладной математики, непосредственно примыкающий к теории вероятностей. Основное отличие математической статистики от теории вероятностей состоит в том, что в математической статистике рассматриваются не действия над законами распределения и числовыми характеристиками случайных величин, а приближенные методы отыскания этих законов и характеристик по результатам экспериментов.

Разработка методов получения, описания и анализа экспериментальных данных, определенных в результате исследования случайных явлений, составляет предмет специальной науки – математической статистики. Эти данные принято называть **статистическими**. Статистические данные часто можно рассматривать как совокупность экспериментальных результатов, которые представляют собой набор возможных значений случайных однородных величин (роста, массы тела, содержания сахара в крови, длительности пребывания больного на койке и т. д.).

Фундаментальными понятиями математической статистики являются генеральная совокупность и выборочная совокупность (выборка).

Генеральная совокупность – это множество подлежащих статистическому изучению однородных объектов, которые характеризуются качественными или количественными признаками. Например: все жители Беларуси в фиксированный момент времени, или только все мужчины, или женщины, или дети; множество действительных чисел, лежащих между 0 и 1; количество больных ревматизмом на земном шаре и т.д. Число объектов генеральной совокупности называют ее **объемом** и обозначают N.

Чтобы изучить генеральную совокупность по какому-либо из её количественных признаков X (острота зрения, показатели анализа крови и т.д.), нужно определить закон распределения данного признака и основные характеристики этого распределения (математическое ожидание, дисперсию). Однако на практике это сложно сделать (либо физически невозможно, либо экономически невыгодно). Поэтому исследуют только часть объектов, так называемую выборку**.**

Выборочная совокупность – множество объектов, случайно отобранных из интересующей нас генеральной совокупности для конкретного статистического исследования. Число объектов выборки называют ее **объемом** и обозначают n. Например, для контроля качества растворов в ампулах для инъекций на отсутствие в них механических загрязнений из серии 5000 ампул отбирают 150 ампул ($N = 5000$ – объем генеральной совокупности, $n = 150$ – объем выборки).

Исследование выборок дает приближенное оценочное значение для интересующего нас параметра. Следовательно, постоянная величина – значение нужной характеристики для генеральной совокупности – заменяется значением случайной величины, полученным по результатам выборки на основании некоторого правила. **Главная цель выборочного метода** – по вычисленной характеристике выборки как можно точнее определить соответствующую характеристику генеральной совокупности. Это возможно лишь в том случае, когда отобранная для работы часть объектов репрезентативна целому, т.е. типична, обладает теми же основными чертами, что и все целое. Иначе говоря, выборка должна быть представительной, т.е. по возможности полнее «представлять» свою генеральную совокупность. Это одно из важнейших требований, предъявляемых к выборке, невыполнение которого ведет к грубым ошибкам и обесценивает результаты исследования. Например, если при изучении заболеваемости населения республики (генеральная совокупность) ишемической болезнью сердца в качестве выборки будет взята группа студентов, то результаты окажутся ошибочными, поскольку свойства выборки не будут соответствовать свойствам генеральной совокупности, как и в случае, когда в качестве выборки будут взяты только пациенты кардиологического диспансера. Репрезентативность выборки обеспечивается ее достаточным объемом и определенными правилами ее формирования.

В зависимости от техники отбора объектов из генеральной совокупности выборки делятся на повторные и бесповторные.

Если выборку отбирают по одному объекту, который обследуют и снова возвращают в генеральную совокупность, то выборка называется **повторной**. Если объекты выборки не возвращаются в генеральную совокупность, то выборка называется **бесповторной**. На практике обычно пользуются бесповторной выборкой.

На практике применяются различные способы отбора. Различают **случайный отбор**, т. е. проводимый с помощью какого-либо случайного механизма, и **неслучайный** (по закономерности). В статистике применяется в основном случайный отбор как более надежный в отражении свойств генеральной совокупности.

Простым случайным отбором называется отбор, удовлетворяющий следующим требованиям:

1. Выбор является случайным;
2. Каждый элемент совокупности может быть выбран;
3. Каждый элемент выбирается независимо от остальных;

4. Все элементы выборки получаются в равных условиях.

Осуществить простой отбор можно различными способами. Например, для извлечения n объектов из генеральной совокупности объема N поступают так: выписывают номера от 1 до N на карточках, которые тщательно перемешивают и наугад вынимают одну карточку, объект, имеющий одинаковый номер с извлеченной карточкой, подвергают обследованию; затем карточка возвращается в пачку и процесс повторяется, т. е. карточки перемешиваются, наугад вынимают одну из них и т. д. Так поступают n раз; в итоге получают **простую случайную повторную** выборку объема n.

Если извлеченные карточки не возвращать в пачку, то выборка будет **простой случайной бесповторной**.

Так можно выбирать группу людей для обследования, ампулы партии для испытания, лекарственные препараты для контроля и т. д.

В реальных условиях простой случайный отбор не всегда осуществим. Он является как бы эталонным идеальным отбором. Его нельзя, например, осуществить из бесконечной генеральной совокупности (время обслуживания, отклонение результата измерения от нормы), из генеральной совокупности, образование которой не завершено и может продолжаться бесконечно долго.

Виды реальных отборов:

1. **Типическим** называют отбор, при котором объекты отбираются не из всей генеральной совокупности, а из каждой ее «типической» части. Например, если ампулы изготовляют на нескольких станках, то отбор производят не из всей совокупности ампул, произведенных всеми станками, а из продукции каждого станка в отдельности. Типическим отбором пользуются тогда, когда обследуемый признак заметно колеблется в различных типических частях генеральной совокупности.

2. **Механическим** называют отбор, при котором элементы генеральной совокупности выбираются по какой-либо закономерности. Например, измерения производятся через равные промежутки времени; контролируется каждая десятая ампула, сходящая с конвейера; каждый пятый человек по списку и т.д.

3. **Серийным** называют отбор, при котором объекты отбирают из генеральной совокупности не по одному, а «сериями», которые подвергаются сплошному обследованию. Например, контролю подвергается не одна таблетка лекарства, а упаковка, не один человек из какой-либо группы, а вся группа. Серийным отбором пользуются тогда, когда обследуемый признак колеблется в различных сериях незначительно.

4. **Субъективным** называют отбор на основе какого-либо субъективного принципа. Например, обследуются не вся партия лекарственных препаратов, а лишь одна, наиболее подозрительная часть. Он экономит время, средства, но может привести к большим ошибкам.

5. **Выбор с помощью случайных независимых измерений** (температура среды, загрязненность атмосферы). Характерен для естественнонаучных исследований.

На практике часто применяется комбинированный отбор, при котором сочетаются указанные выше способы.

§ 6.2. Статистическое распределение выборки. Дискретный и интервальный ряды распределения

Итак, мы хотим знать распределение признака X в генеральной совокупности, но реально исследуем лишь некоторую выборку из неё.

В серии экспериментов, проводимых с выборкой, величина X принимает определенные значения. Эти значения, записанные для всех элементов выборки в том порядке, в котором они были получены в опытах, представляют собой **простой статистический ряд.** Полученные данные и подлежат статистической обработке, статистическому анализу.

Первый шаг при обработке этого материала – наведение в нем определенного порядка, ведущего к получению статистического распределения выборки.

Статистическое распределение выборки – это составление дискретного или интервального рядов соответственно, когда количественный признак, по которому исследуют данную выборку, является дискретной или непрерывной величиной.

Дискретный ряд распределения

Пусть из генеральной совокупности извлечена выборка объемом n. В имеющемся у нас простом статистическом ряду варианта x_1 встречается (повторяется) m_1 раз, x_2 – m_2 раза, ... x_k – m_k раз и т.д. Наблюдавшиеся значения x_i признака X называют **вариантами**, а последовательность вариант, записанную в возрастающем порядке, **вариационным рядом.**

Дискретный вариационный ряд удобно представить в виде таблицы, включающей в себя:

1) различные по значению варианты x_i, расположенные в определенной, заранее выбранной последовательности (обычно в порядке возрастания);

2) m_i – частоты вариантов, т.е. числа наблюдений (повторений) варианты x_i в простом статистическом ряду;

3) $p_i^* = \dfrac{m_i}{n}$ – относительные частоты вариант, т.е. отношения частот m_i к объему выборки n; они являются выборочными (эмпирическими) оценками вероятностей появления значений x_i.

Каждая относительная частота указывает, какая доля общего объёма выборки приходится на данное значение вариантов x_i.

Итак, для дискретной величины X вариационный ряд – статистическое распределение выборки – имеет следующий вид:

Варианта x_i $(x_1 < x_2 < x_3 ... < x_k)$	x_1	x_2	x_3	…	x_k	Контроль
Частота m_i	m_1	m_2	m_3	…	m_k	$\sum_{i=1}^{k} m_i = n$
Относительная частота $p_i^* = \dfrac{m_i}{n}$	$\dfrac{m_1}{n}$	$\dfrac{m_2}{n}$	$\dfrac{m_3}{n}$	…	$\dfrac{m_k}{n}$	$\sum_{i=1}^{k} \dfrac{m_i}{n} = 1$

Напомним, что под распределением дискретной случайной величины в теории вероятностей понимается соответствие между возможными значениями случайной величины и их вероятностями; в математической статистике – соответствие между наблюдаемыми вариантами x_i и их частотами или относительными частотами.

Пример 6.1. В результате отдельных испытаний активности тетрациклина были получены следующие значения (в единицах действия на 1 мг): 925, 940, 760, 905, 995, 965, 940, 925, 940, 905. Составить ряд распределения.

Решение.

Расположив значения активности, частоты и относительные частоты в порядке возрастания, получим дискретный ряд распределения в виде таблицы:

x_i	760	905	925	940	965	995	Контроль
m_i	1	2	2	3	1	1	$\sum_{i=1}^{6} m_i = 10$
$p_i^* = \dfrac{m_i}{n}$	0,1	0,2	0,2	0,3	0,1	0,1	$\sum_{i=1}^{6} \dfrac{m_i}{n} = 1$

Полезность подобного представления данных очевидна по следующей причине: мы получаем практически важный результат – возможность оценить более и менее вероятные значения признака.

Интервальный ряд распределения

Интервальный ряд распределения составляется тогда, когда количественный признак X, является непрерывной случайной величиной, т.е. может принимать любые значения в некотором интервале.

В этом случае статистическое распределение выборки (интервальный ряд) строится следующим образом.

Для начала область изменения признака $(x_{макс} - x_{мин})$ разбивают на несколько интервалов равной ширины. Число интервалов k, как правило, не менее 5 и не более 25 приближенно определяется следующими эмпирическими формулами:

$$k = \sqrt{n}, \text{ или } k \approx 1 + 3{,}33 \lg n \text{ (формула Стерджесса)},$$

где n – объем выборки.

Ширину интервалов вычисляли по следующей формуле:

$$\Delta x = \frac{x_{макс} - x_{мин}}{k}.$$

Затем находят границы интервалов:

$$x_{\min} = x_0,\ x_1 = x_0 + \Delta x,\quad x_2 = x_1 + \Delta x,\ \ldots,\ x_{\max} = x_k.$$

Поскольку некоторые варианты могут являться границей двух соседних интервалов, то, во избежание недоразумений, придерживаются следующего правила: к интервалу (a, b), относят варианты удовлетворяющему неравенству $a \le x < b$.

Затем для каждого интервала подсчитывают частоты m_i и (или) относительные частоты $p_i^* = \dfrac{m_i}{n}$ попадания вариант в данный интервал. Нередко используют также плотность относительной частоты: $\dfrac{m_i}{n\Delta x}$.

Данную величину можно считать выборочной (эмпирической) оценкой плотности вероятности.

Рассмотренное выборочное распределение непрерывной случайной величины X – интервальный ряд – обычно представляется в виде таблицы, имеющей, в частности, следующий вид:

Интервал	$x_0 - x_1$	$x_1 - x_2$	$x_2 - x_3$	…	$x_{k-1} - x_k$
Частота m_i	m_1	m_2	m_3	…	m_k
Относительная частота $p_i^* = \dfrac{m_i}{n}$	$\dfrac{m_1}{n}$	$\dfrac{m_2}{n}$	$\dfrac{m_3}{n}$	…	$\dfrac{m_k}{n}$

Пример 6.2. Анализируемый показатель X – масса тела новорожденного. Определение массы тела 100 новорожденных показало, что минимальная масса составляет 2,7 кг, максимальная – 4,4 кг. Составить ряд распределения.

Решение.

Интервал $(2{,}7-4{,}4)$ кг разбиваем на 10 равных интервалов $(k=\sqrt{100}=10)$ шириной $\Delta x=\dfrac{4{,}4-2{,}7}{10}=0{,}17$ кг и строим интервальный ряд:

Номер интервала	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Интервал, масса тела, кг	2,7-2,87	2,87-3,04	3,04-3,21	3,21-3,38	3,38-3,55	3,55-3,72	3,72-3,89	3,89-4,06	4,06-4,23	4,23-4,4
Частота m_i	4	8	12	16	21	15	11	7	4	2
Относительная частота $p_i^* = \dfrac{m_i}{n}$	0,04	0,08	0,12	0,16	0,21	0,15	0,11	0,07	0,04	0,02
Плотность относительной частоты $\dfrac{m_i}{n\Delta x}$	0,235	0,47	0,7	0,94	1,235	0,88	0,65	0,41	0,235	0,118

Контроль: $\sum_{i=1}^{10} m_i = 4+8+12+16+21+15+11+7+4+2=100=n$,

$$\sum_{i=1}^{10}\frac{m_i}{n}=0{,}04+0{,}08+0{,}12+0{,}16+0{,}21+0{,}15+0{,}11+0{,}07+0{,}04+0{,}02=1.$$

§ 6.3. Графическое представление статистических распределений выборок

Для получения наглядного представления о распределении выборок строят соответствующие графики, в частности, полигон частот или гистограмму распределения.

Вариационный ряд часто изображают графически в виде полигона частот или полигона относительных частот.

Для построения полигона частот на оси абсцисс откладывают варианты x_i, а на оси ординат – соответствующие им частоты m_i. Точки (x_i, m_i) соединяют отрезками прямых.

Полигоном частот называют ломаную линию, отрезки которой соединяют точки (x_1, m_1), (x_2, m_2), …, (x_k, m_k).

Полигоном относительных частот называют ломаную линию, отрезки которой соединяют точки $(x_1, \frac{m_1}{n})$, $(x_2, \frac{m_2}{n})$, …, $(x_k, \frac{m_k}{n})$. На рисунке 6.1 показан полигон частот.

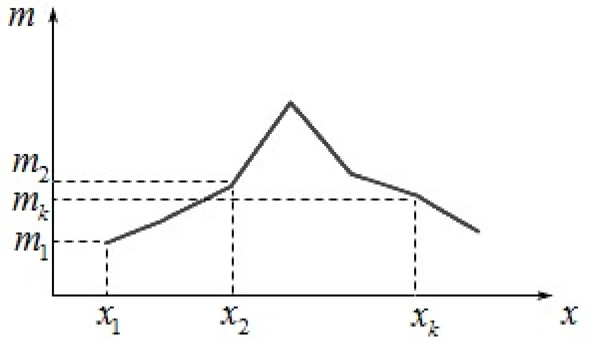


Рис. 6.1

Для непрерывной случайной величины обычно строят гистограммы частот или гистограммы относительных частот.

Гистограммой частот называют диаграмму, состоящую из вертикальных прямоугольников, основаниями которых являются интервалы длиной Δx, а высоты равны отношению $\frac{m_i}{\Delta x}$ (плотности частоты).

Для построения гистограммы частот на оси абсцисс откладывают интервалы значений исследуемого показателя (интервалы вариант) и на них строят прямоугольники высотой $\frac{m_i}{\Delta x}$. Площадь i-го прямоугольника равна $\Delta x \cdot \frac{m_i}{\Delta x} = m_i$, т.е. равна количеству вариант в i-м интервале. Следовательно, площадь гистограммы частот равна сумме частот для всех интервалов, иначе говоря, равна объему выборки.

Гистограмма относительных частот отличается от предыдущей гистограммы тем, что на ней высоты прямоугольников равны отношению $\frac{m_i}{n\Delta x}$, т. е. равны плотности относительной частоты (эмпирической плотности вероятности). В этом случае площадь i-го прямоугольника равна $\Delta x \cdot \frac{m_i}{n\Delta x} = p_i^*$ – относительной частоте вариант, попавших в i-й интервал (рис.6.2). Напомним, что p^* – оценка вероятности попадания значений X в выбранный интервал. Площадь гистограммы относительных частот равна сумме относительных частот для всех интервалов, т. е. равна единице.

Отметим, что гистограммой называют и фигуру, состоящую из вертикальных прямоугольников, высотами которых являются непосредственно частоты m_i для соответствующих интервалов или относительные частоты (в нормированной гистограмме), а также относительные частоты в процентах (процентная гистограмма). Два последние варианта позволяют сравнивать гистограммы, построенные на одних и тех же интервалах, но для различных выборок из той же генеральной совокупности.

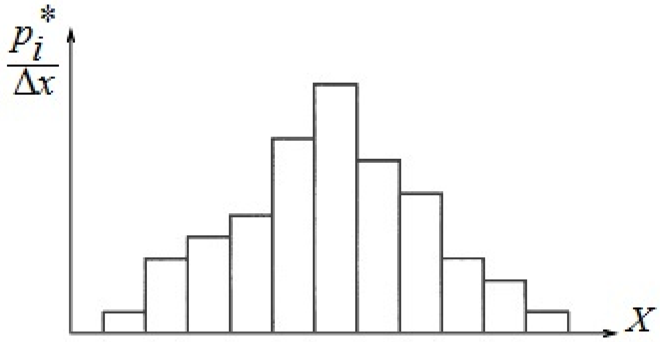


Рис. 6.2

Важно, что гистограммы можно использовать для оценки закона распределения признака в генеральной совокупности. Соединяя средние точки верхних оснований прямоугольников гистограммы относительных частот плавной линией, можно по данным выборки получить примерный вид графика зависимости плотности вероятности $f(x)$. Можно предположить, что анализируемый показатель в генеральной совокупности распределен по нормальному закону, т. е. нормальный закон является вероятностной моделью для данного признака.

Пример 6.3. Построить полигон частот и относительных частот по распределению выборки

X_i	2	3	5	6
m_i	10	15	5	20

Решение.

Полигон частот (рис. 6.3).

Полигон относительных частот (рис. 6.4).

$$P^* = \frac{m_i}{n_i}; \quad n = 10 + 15 + 5 + 25 = 50;$$

$$P_1^* = \frac{10}{50} = 0{,}2; \quad P_2^* = \frac{15}{50} = 0{,}3; \quad P_3^* = \frac{5}{50} = 0{,}1; \quad P_4^* = \frac{20}{50} = 0{,}4.$$

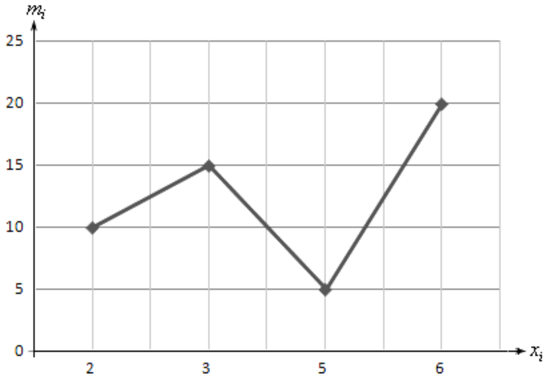


Рис. 6.3

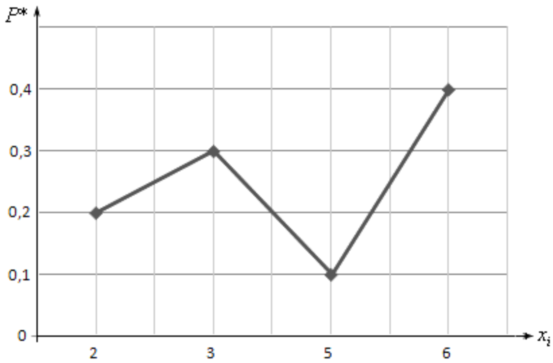


Рис. 6.4

§ 6.4. Эмпирическая функция распределения

Предположим, что изучается некоторая случайная величина X, закон распределения которой неизвестен. Требуется определить этот закон на основании опыта или проверить экспериментально гипотезу о том, что величина X подчинена тому или иному закону. С этой целью над случайной величиной X проводится ряд независимых опытов и составляется статистическое распределение выборки количественного признака X. Чтобы получить представление о распределении случайной величины X, строят эмпирическую функцию распределения.

Эмпирической функцией распределения (функцией распределения выборки) – называют функцию $F^*(x)$, определяющую для каждого значения x относительную частоту события $X < x$:

$$F^*(x) = \frac{m(x)}{n},$$

где $m(x)$ – число наблюдений, при которых значение признака X меньше x; n – объём выборки.

В отличии от эмпирической функции распределения $F^*(x)$ выборки, функцию распределения $F(x)$ генеральной совокупности называют **теоретической функцией**.

Различие между эмпирической $F^*(x)$ и теоретической $F(x)$ функциями состоит в том, что $F(x)$ определяет вероятность события $X < x$, а $F^*(x)$ – относительную частоту этого же события. Поэтому эмпирическую функцию распределения выборки $F^*(x)$ можно использовать для приближённого представления теоретической функции распределения генеральной совокупности.

Функция $F^*(x)$ имеет следующие свойства:

1. Значения эмпирической функции принадлежит отрезку [0;1].

2. $F^*(x)$ – неубывающая функция.

3. Если x_1 – наименьшая варианта, то $F^*(x)=0$ при $x \le x_1$; если x_k – наибольшая варианта, то $F^*(x)=1$, при $x > x_k$.

График эмпирической функции представлен на рисунке 6.5:

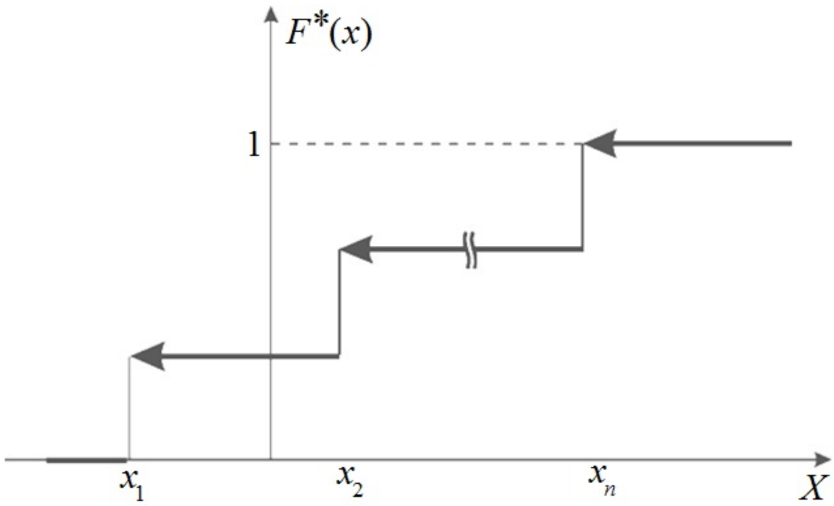


Рис. 6.5

Пример 6.4. Построить эмпирическую функцию по данному распределению выборки:

x_i	2	6	10
m_i	12	18	30

Решение.

Найдем объем выборки $n = 12 + 18 + 30 = 60$. Наименьшая варианта равна 2, следовательно, $F^*(x) = 0$ при $x \le 2$.

Значение $X < 6$, а именно $x_1 = 2$, наблюдалось 12 раз, следовательно, $F^*(x) = \frac{12}{60} = 0{,}2$ при $2 < x \le 6$.

Значения $X < 10$, а именно $x_1 = 2$ и $x_2 = 6$, наблюдалось $12 + 18 = 30$ раз, следовательно, $F^*(x) = \frac{30}{60} = 0{,}5$ при $6 < x \le 10$.

Так как $x = 10$ – наибольшая варианта, то $F^*(x) = 1$ при $x > 10$.

Искомая эмпирическая функция

$$F^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 2 \\ 0{,}2 & \text{при} \quad 2 < x \le 6 \\ 0{,}5 & \text{при} \quad 6 < x \le 10 \\ 1 & \text{при} \quad x > 10 \end{cases}$$

График этой функции изображен на рисунке 6.6.

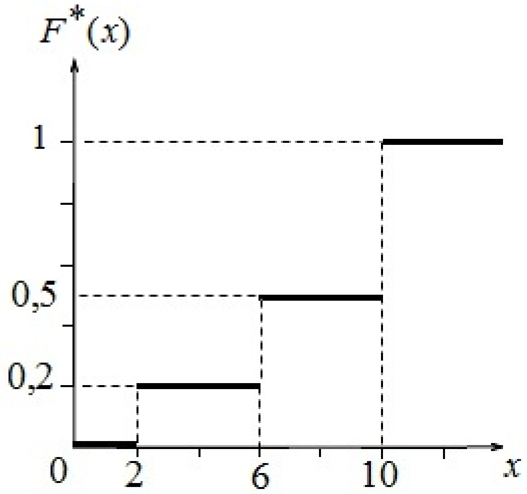


Рис. 6.6

§ 6.5. Понятие о несмещенности, состоятельности и эффективности оценок параметров распределения

К статистическому распределению выборки применимы многие характеристики распределения вероятностей. Таковы например, выборочная средняя, выборочная дисперсия, выборочное среднее квадратическое отклонение.

Характеристики статистического распределения выборки применяются для оценки неизвестных параметров теоретического распределения вероятностей. Различают точечные и интервальные оценки.

Точечной называют оценку, которая определяется одним числом. Пусть мы имеем выборку, состоящую из значений $x_1, x_2, ..., x_n$, взятую из генеральной совокупности с известным законом распределения, параметр θ имеет постоянное, но неизвестное значение. При условии, что оценке подлежит единственный параметр θ, точечная оценка представляет собой функцию от результатов наблюдений $\theta^*(x_1, x_2, ..., x_n)$.Для того, чтобы оценка давала хорошее приближение, она должна удовлетворять определённым требованиям: быть несмещённой, эффективной и состоятельной.

Точечная оценка θ^* параметра θ называется **несмещенной**, если её математическое ожидание равно оцениваемому параметру при любом объёме выборки, т.е. $M(\theta^*) = \theta$.

Оценку, математическое ожидание которой не равно оцениваемому параметру, называют **смещенной.**

За меру точности несмещенной оценки θ^* для параметра θ принимают дисперсию $D(\theta^*)$. Оценку с наименьшей дисперсией называют **наилучшей.**

В качестве характеристики для сравнения точности различных оценок применяют **эффективность** – отношение дисперсий наилучшей оценки и данной несмещенной оценки.

При большом количестве наблюдений обычно требуется, чтобы выбранная оценка θ^* стремилась по вероятности к истинному значению неизвестного параметра θ, т.е. чтобы для любого $\varepsilon > 0$ выполнялось равенство:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\theta^* - \theta\right| < \varepsilon\right) = 1$$

Такие оценки называют **состоятельными.**

Из отмеченных требований, предъявляемых к оценке, наиболее важными являются требования несмещенности и состоятельности.

§ 6.6. Оценки параметром генеральной совокупности по ее выборке

Методы описательной статистики – это методы описания выборок, исследуемых по количественному признаку *X*, с помощью различных числовых характеристик. Преимущество данных методов заключается в следующем: несколько простых и достаточно информативных статистических показателей, если они известны, во-первых, избавляют нас от просмотра сотен, а порой и тысяч значений признака, во-вторых, позволяют получить более или менее точную оценку характеристик распределения признака в генеральной совокупности.

Генеральной средней $\bar{x}_г$ называется среднее арифметическое значений признака генеральной совокупности.

Если все значения $x_1, x_2, ..., x_N$ признака генеральной совокупности объема N различны, то

$$\bar{x}_г = \frac{1}{N}(x_1 + x_2 + ... + x_N).$$

Если же все значения признака $x_1, x_2, ..., x_k$ имеют соответственно частоты $M_1, M_2, ..., M_k$, причем $M_1 + M_2 + ... + M_k = N$, то

$$\overline{x}_г = \frac{1}{N}(x_1 M_1 + x_2 M_2 + ... + x_k M_k) \qquad \text{или} \qquad \overline{x}_г = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} x_i M_i .$$

Выборочной средней $\overline{x}_в$ называется среднее арифметическое значений признака выборочной совокупности.

Если все значения $x_1, x_2, ..., x_n$ признака выборки объема n различны, то

$$\overline{x}_в = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + ... + x_n) \qquad \text{или} \qquad \overline{x}_в = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} .$$

Если же все значения признака $x_1, x_2, ..., x_k$ имеют соответственно частоты $m_1, m_2, ..., m_k$, причем $m_1 + m_2 + ... + m_k = n$, то

$$\overline{x}_в = \frac{1}{n}(x_1 m_1 + x_2 m_2 + ... + x_k m_k) \qquad \text{или} \qquad \overline{x}_в = n\sum_{i=1}^{k} x_i m_i ,$$

где x_i – i-я варианта, полученная в опыте с i-м элементом выборки; n – объем выборки.

Выборочная мода $Mo_в$ – варианта, которая чаще всего встречается в исследуемой выборке, т. е. имеет наибольшую частоту.

Для того, чтобы охарактеризовать рассеяние значений количественного признака X генеральной совокупности вокруг своего среднего значения, вводят следующую характеристику – генеральную дисперсию.

Генеральной дисперсией $D_г$ называется среднее арифметическое квадратов отклонения значений признака X генеральной совокупности от генеральной средней $\overline{x}_г$.

Если все значения $x_1, x_2, ..., x_N$ признака генеральной совокупности объема N различны, то

$$D_г = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x}_г)^2 .$$

Если же все значения признака $x_1, x_2, ..., x_k$ имеют соответственно частоты $M_1, M_2, ..., M_k$, причем $M_1 + M_2 + ... + M_k = N$, то

$$D_г = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \overline{x}_г)^2 M_i .$$

Пример 6.5. Генеральная совокупность задана таблицей распределения:

x_i	2	4	5	6
M_i	8	9	10	3

Найти генеральную дисперсию.

Решение.

Согласно формулам $\overline{x}_г = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} x_i M_i$ и $D_г = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \overline{x}_г)^2 M_i$ имеем:

$$\overline{x}_г = \frac{2\cdot 8 + 4\cdot 9 + 5\cdot 10 + 6\cdot 3}{8+9+10+3} = \frac{120}{30} = 4,$$

$$D_г = \frac{(2-4)^2\cdot 8 + (4-4)^2\cdot 9 + (5-4)^2\cdot 10 + (6-4)^2\cdot 3}{8+9+10+3} = \frac{54}{30} = 1{,}8.$$

Генеральным средним квадратическим отклонением (стандартом) называется корень квадратный из генеральной дисперсии

$$\sigma_г = \sqrt{D_г}.$$

Выборочной дисперсией $D_в$ называют среднее арифметическое квадратов отклонений наблюдаемых значений признака X от выборочной средней $\overline{x}_в$.

Если все значения $x_1, x_2, ..., x_n$ признака генеральной совокупности объема n различны, то

$$D_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}_в)^2.$$

Если же все значения признака $x_1, x_2, ..., x_k$ имеют соответственно частоты $m_1, m_2, ..., m_k$, причем $m_1 + m_2 + ... + m_k = n$, то

$$D_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \overline{x}_в)^2 m_i.$$

Пример 6.6. Выборочная совокупность задана таблицей распределения:

x_i	1	2	3	4
m_i	20	15	10	5

Найти выборочную дисперсию.

Решение.

Согласно формулам $\overline{x}_в = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$ и $D_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \overline{x}_в)^2 m_i$ имеем:

$$\overline{x}_в = \frac{1\cdot 20 + 2\cdot 15 + 3\cdot 10 + 4\cdot 5}{20+15+10+5} = \frac{100}{50} = 2,$$

$$D_в = \frac{(1-2)^2\cdot 20 + (2-2)^2\cdot 15 + (3-2)^2\cdot 10 + (4-2)^2\cdot 5}{20+15+10+5} = \frac{50}{50} = 1.$$

Выборочным средним квадратическим отклонением (стандартом) называется корень квадратный из выборочной дисперсии:

$$\sigma_в = \sqrt{D_в}.$$

§ 6.7. Доверительный интервал для оценки математического ожидания нормального распределения. Распределение Стьюдента

Под **интервальной оценкой параметров генеральной совокупности** понимают определение некоторого интервала, в который с заданной вероятностью попадает истинное значение исследуемого признака. Такой интервал называется **доверительным интервалом,** а вероятность того, что истинное значение оцениваемой величины находится внутри этого интервала, – **доверительной вероятностью** или **надежностью.**

В медицинской литературе для этой величины используется термин «вероятность безошибочного прогноза». Обозначим ее $\boldsymbol{\gamma}$. Значения $\boldsymbol{\gamma}$ задаются заранее (обычно в медико-биологических исследованиях выбирают значения $\gamma = 0{,}95 = 95\%$ или $\gamma = 0{,}99 = 99\%$), после чего находят соответствующий доверительный интервал.[1]

Для построения надежных интервальных оценок необходимо знать закон, по которому оцениваемый случайный признак распределен в генеральной совокупности.

Рассмотрим, вначале для малых выборок ($n < 30$), как строится интервальная оценка генеральной средней $\overline{x}_г = M(X)$ признака, который в генеральной совокупности распределен по нормальному закону. В этом случае интервальной оценкой (с доверительной вероятностью $\boldsymbol{\gamma}$) генеральной средней (математического ожидания) $\overline{x}_г = M(X)$ количественного признака X по выборочной средней $\overline{x}_в$ при неизвестном $\sigma_г$ является доверительный интервал:

$$\overline{x}_в - \delta < M(X) < \overline{x}_в + \delta,$$

или в другой форме записи:

$$\overline{x}_г = M(X) = \overline{x}_в \pm \delta,$$

[1] Иногда вместо доверительной вероятности используется величина $\alpha = 1 - \gamma$, которая называется уровнем значимости.

где $\delta = t_{\gamma,f} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$ – полуширина доверительного интервала (точность оценки); n – объем выборки ($f = n-1$ – число степеней свободы); S – выборочное среднее квадратическое отклонение; $\frac{S}{\sqrt{n}}$ – стандартная ошибка выборочного среднего; $t_{\gamma,f}$ – коэффициент Стьюдента (его значения либо определяются по соответствующим таблицам, либо содержатся в программных статистических пакетах обработки данных).

Анализ формулы $\overline{x}_в - \delta < M(X) < \overline{x}_в + \delta$ показывает, что:

а) чем больше доверительная вероятность **γ**, тем больше коэффициент $t_{\gamma,f}$ и шире доверительный интервал;

б) чем больше объем выборки n, тем у́же доверительный интервал.

При большой выборке $(n > 30)$ полуширину доверительного интервала δ определяют по соотношениям:

$$\delta = 1{,}96 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \text{ – при } \boldsymbol{\gamma} = 95\% \text{ или } \delta = 2{,}58 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \text{ при } \boldsymbol{\gamma} = 99\%.$$

Подобные интервальные оценки с заданной надежностью даются и тогда, когда рассматриваемый случайный признак распределен в генеральной совокупности не по нормальному, а по другим законам.

Распределение Стьюдента

Пусть случайная величина *X* генеральной совокупности распределена нормально, причем среднее квадратическое отклонение σ неизвестно. Требуется оценить неизвестное математическое ожидание μ при помощи доверительных интервалов.

По данным выборки из независимых наблюдений можно получить случайную величину

$$T = \frac{(\overline{x} - M(X))}{S_{\overline{x}}},$$

которая имеет распределение Стьюдента с $f = n-1$ степенями свободы; здесь $\overline{x}$ – выборочная средняя, $S_{\overline{x}}$ – оценка среднего квадратического отклонения выборочной средней, $M(X)$ – математическое ожидание.

Плотность вероятности величины *T* (ее возможные значения обозначены через *t*) выражается формулой

$$\varphi(t)=\frac{\left(\frac{f+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi f}\,(f/2)!(1+t^2/f)^{\frac{f+1}{2}}}$$

Мы видим, что распределение Стьюдента определяется параметром n – объемом выборки (или, что то же, числом степеней свободы $f=n-1$) и не зависит от неизвестных параметров $M(X)$ и σ; эта особенность является его большим достоинством).

Кривая плотности вероятности приведена на рисунке 6.7. Как видно из рисунка, кривая распределения симметрична относительно оси, проходящей через $t=0$; ее ветви асимптотически приближаются к оси *Ot*. С ростом числа степеней свободы распределение Стьюдента приближается к нормальному и уже при $n\geq 30$ практически не отличается от него.

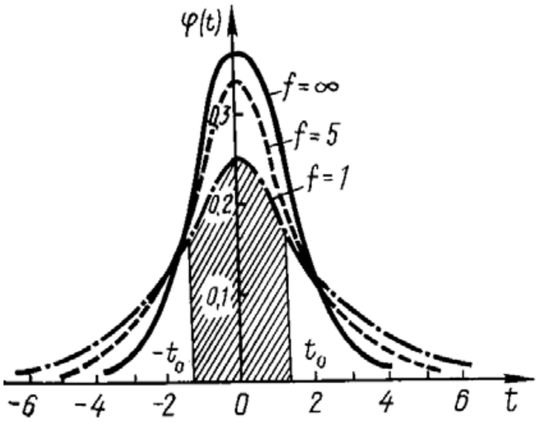


Рис. 6.7

Следовательно, при оценке неизвестных параметров по выборке малого объема $n<30$ пользуются распределением Стьюдента.

Если известна функция плотности вероятности, можно найти вероятность того, что в результате испытания будет получено значение *t*, не превосходящее заданного t_0 по абсолютной величине: $|t|<t_0$, т.е. $\gamma=P(-t_0<t<t_0)$. На рис. 6.7 эта вероятность для $f=1$ численно равна площади заштрихованной фигуры и может быть вычислена по формуле

$$P(-t_0<t<t_0)=\int_{-t_0}^{t_0}\varphi(t)\,dt.$$

Наоборот, для заданных n и γ можно указать такое t_0 , что случайно выбранное *t* должно находиться в пределах от – t_0 до t_0, т.е. с вероятностью γ выполняется неравенство

$$\frac{\left|\bar{x}-M(X)\right|}{S_{\bar{x}}}=|t|<t_0,$$

где коэффициент Стьюдента t_0 зависит от числа степеней свободы $f = n-1$ и доверительной вероятности γ. Поэтому его обозначают $t_{\gamma,f}$.

Из последнего неравенства следует:

$$\left|\overline{x} - M(X)\right| \le t_{\gamma,f} \cdot S_{\overline{x}},$$

откуда $\overline{x} - t_{\gamma,f} \cdot S_{\overline{x}} \le M(X) \le \overline{x} + t_{\gamma,f} \cdot S_{\overline{x}}$.

Таким образом, интервальной оценкой математического ожидание является доверительный интервал

$$\left(\overline{x} - t_{\gamma,f} \cdot S_{\overline{x}};\ \overline{x} + t_{\gamma,f} \cdot S_{\overline{x}}\right).$$

Пример 6.7. Случайная величина X имеет нормальное распределение. По выборке объемом $n=15$ выборочная средняя равно $\overline{x}=18{,}3$, а оценка среднего квадратического отклонения $S=0{,}6$. Дать интервальную оценку математического ожидания с доверительной вероятностью $\gamma=0{,}95$.

Решение.

Коэффициент Стьюдента найдем из приложения 4:

$$t_{0,95;14} = 2{,}145.$$

Вычислим полуширину доверительного интервала:

$$\delta = t_{\gamma,f} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} = 2{,}145 \cdot \frac{0{,}6}{\sqrt{15}} = 0{,}33.$$

Находим границы интервала

$$\overline{x}_в - \delta < M(X) < \overline{x}_в + \delta$$

$$18{,}3 - 0{,}33 < M(X) < 18{,}3 + 0{,}33,$$

$$17{,}97 < M(X) < 18{,}63.$$

Таким образом, интервальная оценка математического ожидания равна доверительному интервалу $[17{,}97; 18{,}63]$.

Вопросы для самоконтроля

1. В чём состоит основное отличие математической статистики от теории вероятностей?
2. Что понимается под статистическими данными?
3. Дайте определение генеральной совокупности. Что понимается под объёмом генеральной совокупности? Приведите примеры.
4. Дайте определение выборочной совокупности. Что понимается под объёмом выборочной совокупности? Приведите примеры.
5. В чём состоит главная цель выборочного метода?
6. Дайте определение повторной, бесповторной выборки.
7. Каким требованиям должен удовлетворять простой случайный отбор?

8. Перечислите виды реальных отборов. Дайте определение каждому виду реальных отборов.
9. Что такое простой статистический ряд?
10. Что понимается под статистическим распределением выборки?
11. Что понимается под вариационным рядом распределения?
12. Укажите все составные части таблицы, с помощью которой может быть представлен дискретный вариационный ряд? интервальный ряд?
13. Дайте определение полигону частот, полигону относительных частот.
14. Что понимают под гистограммой частот, гистограммой относительных частот?
15. Что такое эмпирическая функция распределения? Для каких целей необходимо ее построение?
16. Назовите основные свойства эмпирической функции распределения. Дайте необходимые пояснения для каждого из ее свойств.
17. Что понимается под точечной оценкой?
18. При каких условиях точечная оценка является несмещенной? смещенной?
19. Что такое эффективность?
20. Какие оценки называются состоятельными?
21. Что такое выборочное среднее? Запишите соответствующую формулу.
22. Дайте определение выборочной дисперсии. Запишите соответствующую формулу.
23. Что такое среднее квадратическое отклонение? Запишите соответствующую формулу.
24. Что такое размах выборки?
25. Что понимают под интервальной оценкой параметров генеральной совокупности?
26. Дайте определение доверительному интервалу.
27. Что называется доверительной вероятностью или надёжностью?
28. Сформулируйте принцип построения интервальной оценки генеральной средней $\overline{x}_г = M(X)$ признака, который в генеральной совокупности распределен по нормальному закону для выборок объёма $n < 30$ ($n > 30$). Запишите соответствующие формулы.
29. Чем определяется и от чего зависит (не зависит) распределение Стьюдента?
30. Что является интервальной оценкой математического ожидания в соответствии с распределением Стьюдента? Запишите формулу.

Задания для решения

1. Записать выборку 5, 6, 7, 10, 7, 2, 7, 7, 4, 2, 4 в виде: а) вариационного статистического ряда, б) интервального статистического ряда.

2. Представить в виде статистического дискретного ряда данные о длине листьев садовой земляники (в см) и построить полигон частот: 8,2; 9,7; 6,6; 7,4;6,4; 6,6; 6,8; 8,4; 7,1; 8,0; 9,0; 6,0; 7,6; 8,1; 11,8; 5,8; 9,3; 7,3; 8,2; 7,2; 7,2; 6,4; 7,7; 9,0; 8,1; 7,1; 7,1; 8,8; 7,5; 9,2; 7,5; 6,8; 7,0; 6,4; 7,4; 8,2; 6,3; 7,0; 8,1; 7,0; 7,1; 8,7; 6,3; 8,6; 7,7; 7,3; 8,0; 8,4; 9,3.

3. В приведенной ниже таблице указаны значения случайной величины и число случаев, в которых они наблюдалось (*m*). Построить полигон частот.

x_i	1	4	5	7
m_i	20	10	14	6

4. В приведенной ниже таблице представлено распределение 25 кроликов по массе. Построить гистограмму.

Масса (кг)	Число *m*	Масса (кг)	Число *m*
3,0 – 3,5	1	5,5 – 6,0	5
3,5 – 4,0	1	6,0 – 6,5	3
4,0 – 4,5	3	6,5 – 7,0	1
4,5 – 5,0	3	7,0 – 7,5	1
5,0 – 5,5	7		

5. Построить гистограмму выборки, представленной в виде следующей таблицы.

Границы интервала	Число вариант в интервале
0 – 2	20
2 – 4	30
4 – 6	50

6. Построить полигон частот распределения скорости оседания эритроцитов (СОЭ) у 100 человек:

x_i	1	3	5	7	9
m_i	10	15	30	33	12

7. Построить полигон относительных частот по данному распределению:

x_i	1	4	15	7
m_i	20	10	14	6

8. Найти эмпирическую функцию по данному распределению выборки:

x_i	1	4	6
m_i	10	15	25

9. Построить гистограмму изменения кровяного давления у 200 практически здоровых женщин в возрасте 60—65 лет по данным статистического распределения:

X, мм рт. ст.	m_i	X, мм рт. ст.	m_i	X, мм рт. ст.	m_i
70 – 80	1	100 – 110	17	130 – 140	57
80 – 90	1	110 – 120	36	140 – 150	30
90 – 100	5	120 – 130	42	150 – 160	11

10. Построить гистограмму частот и относительных частот по данному распределению выборки:

Интервал X	2 – 7	7 – 12	12 – 17	17 – 22	22 – 27	27 – 32
m_i	5	10	20	8	4	3

11. Построить гистограмму распределения скорости оседания эритроцитов (СОЭ) у 50 человек:

Интервал	m_i
2 – 5	9
5 – 8	10
8 – 11	25
11 – 14	6

12. Ниже приведены результаты измерения веса (мг) случайно отобранных 32 препаратов: 2,00; 4,25; 5,00; 4,25; 5,15; 2,25; 5,30; 4,25; 2,75; 3,10; 4,40; 5,30; 4,50; 5,45; 3,25; 3,40; 3,65; 4,50; 4,75; 5,80; 5,75; 3,8; 4,85; 5,95; 6,45; 4,00; 4,90; 4,90; 4,15; 7,00; 7,45; 8,00. Построить гистограмму относительных частот распределения веса препарата, сгруппировав данные в 5 интервалов.

13. Наблюдения за сахаром крови у 50 человек дали такие результаты: 3,94; 3,84, 3,86; 4,06; 3,67; 3,97; 3,76; 3,61; 3,96; 4,04; 3,82; 3,94;

3,98; 3,57; 3,87; 4,07; 3,99; 3,69; 3,76; 3,71; 3,81; 3,71; 4,16; 3,76; 4,00; 3,46; 4,08; 3,88; 4,01; 3,93; 3,92; 3,89; 4,02; 4,17; 3,72; 4,09; 3,78; 4,02; 3,73; 3,52; 3,91; 3,62; 4,18; 4,26; 4,03; 4,14; 3,72; 4,33; 3,82; 4,03.

Построить по этим данным интервальный вариационный ряд с равными интервалами и изобразить его графически, начертить гистограмму.

14. Для выборки 2, 4, 6, 8, 10 определить: выборочное среднее, выборочную дисперсию, среднее квадратическое отклонение.

15. При измерениях получены следующие значения некоторых величин:

а) 19, 20, 21; б) 37, 38, 37, 39, 40; в) 3, 2, 3; г) 4, 5, 6, 4.

Дать интервальную оценку истинного значения измеряемой величины, рассматривая полученные значения как малую выборку. Доверительную вероятность принять равной 0,95 и 0,99.

16. Произведено 5 независимых измерений толщины пластины. Получены следующие результаты: 2,15; 2,18; 2,14; 2,16; 2,17. Оценить истинное значение толщины пластины с помощью доверительного интервала, принимая доверительную вероятность 0,95.

17. При подсчете количества листьев у одного из лекарственных растений были получены следующие данные: 8, 10, 7, 9, 11, 6, 9, 8, 7. Вычислить выборочную среднюю и оценку среднего квадратического отклонения выборочной средней.

18. При измерении некоторой величины X получены следующие результаты: 10,9; 10,7; 11,0; 10,5; 10,6; 10,4; 11,3; 10,8; 11,2; 10,9; 10,8; 10,3; 10,5; 10,9; 10,9; 10,6; 11,3; 10,8; 10,9; 10,7. Вычислить точечную и интервальную оценки для величины X с доверительной вероятностью 0,95.

19. Исследуя продолжительность (в секундах) физической нагрузки до развития приступа стенокардии у 12 человек с ишемической болезнью сердца, получили следующие данные: 289; 203; 359; 243; 232; 210; 215; 246; 224; 239; 220; 211. Найдите среднюю, среднее квадратическое отклонение. Можно ли считать, что данная выборка извлечена из совокупности с нормальным распределением?

20. При исследовании клинической оценки тяжести серповидноклеточной анемии была получена выборка объёма 30:

0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 6, 7, 9, 10.

Найдите среднюю, среднее квадратическое отклонение. Можно ли считать, что выборка извлечена из совокупности с нормальным распределением?

21. Случайной величиной является скорость распространения механической волны v (м/с), измеренная на пораженных участках кожи у больных псориазом в различных стадиях. Получен простой статистический ряд для разных стадий.

Регрессирующая стадия: 38, 39, 41, 41, 38, 43, 40, 40, 42, 38, 38, 39, 41, 42, 41, 42, 41, 39, 43, 38, 42, 43, 40, 39, 40, 38, 43, 42, 39, 42.

Стационарная стадия: 49, 46, 54, 49, 50, 50, 46, 56, 49, 46, 54, 50, 56, 49, 46, 53, 52, 52, 51, 51, 53, 53, 50, 47, 47, 55, 55, 50, 54, 56.

Прогрессирующая стадия: 65, 58, 58, 62, 64, 65, 64, 68, 68, 67, 59, 66, 66, 68, 70, 72, 69, 67, 65, 68, 71, 71, 70, 67, 72, 69, 68, 68, 62, 60.

Построить и сравнить гистограммы. Найти и сравнить числовые характеристики статистических рядов.

22. При измерении скорости распространения механических волн в коже щеки после процедуры криомассажа у пациенток с разным типом кожи получены значения v (м/с), представленные простым статистическим рядом.

Сухая кожа: 38, 58, 46, 39, 49, 62, 62, 49, 43, 44, 68, 41, 54, 64, 64.

Жирная кожа: 41, 54, 54, 41, 64, 42, 56, 56, 42, 56, 56, 65, 65, 39.

Построить и сравнить гистограммы. Найти и сравнить числовые характеристики рядов.

23. Случайной величиной является значение скорости v (м/с) распространения механической волны в рубцово-измененных тканях разного типа. Получен простой статистический ряд для разных рубцов.

Неосложненный рубец: 40, 39, 42, 42, 43, 40, 41, 45, 42, 40, 44, 39, 40, 40, 41, 41, 43, 42, 45, 42, 39, 38, 40, 45, 43, 42, 39, 38, 41, 42.

Гипертрофический рубец: 60, 64, 65, 63, 66, 59, 58, 67, 71, 72, 72, 68, 67, 70, 69, 69, 68, 67, 70, 67, 66, 67, 70, 69, 71, 67, 70.

Келлоидный рубец: 80, 85, 88, 89, 90, 95, 98, 99, 95, 100, 92, 96, 97, 99, 98, 89, 89, 100, 102, 105, 99, 98, 82, 84, 83, 101, 99, 98, 97, 100.

Построить и сравнить гистограммы для трех типов рубцов. Найти и сравнить числовые характеристики рядов.

24. На аналитических весах производится взвешивание некоторого вещества без учета систематических ошибок. Случайные погрешности распределены по нормальному закону со средним квадратическим отклонением 2 мг. Найти вероятность того, что отклонение результата взвешивания от математического ожидания не превзойдет по абсолютной величине 1 мг.

25. При исследовании частоты дыхания при выборке объёмом 15 человек были получены выборочная средняя 18,5 и среднее квадратическое отклонение 0,6. Дать интервальную оценку математического ожидания с доверительной вероятностью 0,95.

ГЛАВА VII
ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ОШИБОК (ПОГРЕШНОСТЕЙ)

§ 7.1. Погрешности измерений и их виды

Теория ошибок – изучение и оценка погрешностей в измерениях. Опыт показывает, что ни одно измерение, как бы тщательно оно ни проводилось, не может быть совершенно свободно от ошибок. Поскольку в основе любой науки и ее применений лежат измерения, исключительно важно уметь рассчитывать эти ошибки и сводить их к минимуму.

Целью любого измерения некоторой физической величины является получение ее истинного значения. Однако это весьма непростая задача из-за различных ошибок (погрешностей), неизбежно возникающих при измерениях.

Все измерения делятся на прямые и косвенные. **Прямые измерения** производятся с помощью приборов, которые непосредственно измеряют исследуемую величину. При **косвенных измерениях** определяемую величину вычисляют по некоторой формуле, а параметры, входящие в эту формулу, находят путем прямых измерений. Погрешность, возникающая при прямых измерениях, естественно, ведет к появлению ошибки косвенно определяемой величины.

Все ошибки разделяют на систематические, случайные и грубые (промахи).

Систематические ошибки зависят от неправильных показаний измерительных приборов, неправильно градуированных приборов, мерных колб, пипеток, бюреток, невыверенных разновесов и др. Систематические ошибки должны быть устранены. Для этого перед работой все приборы необходимо прокалибровать, неисправные заменить на исправные и т. д. В показания выверенных приборов следует внести соответствующие поправки.

Случайные ошибки возникают от различных помех, несовершенства органов чувств экспериментатора и других случайных причин. Ограниченная точность приборов, изменение условий, при которых проводится опыт (особенно это имеет значение при параллельных определениях), также приводят к возникновению случайных ошибок.

Грубые ошибки в основном связаны с субъективными свойствами экспериментатора: невнимательностью и неряшливостью, занятием посторонними делами во время работы и др. Это приводит к неверным отсчетам, неправильным записям. При обработке результатов анализа грубые ошибки во внимание не принимают – их отбрасывают.

Необходимо отметить, что ошибки измерений, как правило, подчиняются нормальному закону распределения.

§ 7.2. Абсолютная и относительная погрешности, класс точности

Во всякой экспериментальной работе большое значение имеет точность измерений, воспроизводимость и правильность результатов анализа. Опыт показывает, что любая измеряемая величина имеет свою ошибку; это обусловлено несовершенством приборов, их ограниченной точностью, влиянием внешних условий, загрязнениями, неправильно проведенными записями и пр.

Кроме того, при измерениях могут появляться ошибки, зависящие от ряда причин, природа которых остается неизвестной. Поэтому в результате эксперимента аналитик всегда устанавливает только приближенное значение определяемой величины, но никогда не может получить истинного ее значения. Вследствие этого измеряемая величина имеет некоторую ошибку, величину которой принято определять как абсолютную и относительную ошибки (погрешности).

Абсолютной погрешностью Δx измеряемой величины называют разницу между полученным результатом измерения $x_{изм}$ и истинным (или более достоверным) значением $x_{ист}$ определяемой величины:

$$x_{изм} - x_{ист} = \Delta x\,.$$

Абсолютную погрешность определяют в абсолютных единицах, ее размерность отвечает размерности измеряемой величины.

Относительной погрешностью ε измеряемой величины называют отношение абсолютной погрешности Δx к точному значению $x_{ист}$ определяемой величины:

$$\varepsilon = \frac{|x_{изм} - x_{ист}|}{x_{ист}}\,.$$

Относительная погрешность является отношением двух величин одной и той же размерности, поэтому относительные погрешности – всегда безразмерные величины. Их, как правило, выражают в процентах.

Точностью измерительного прибора называется та наименьшая величина, которую можно вполне надежно определить с его помощью. Точность указывается либо на самом приборе, либо в прилагаемом к нему паспорте. Если точность прибора неизвестна и измерения проводятся путем сравнения измеряемой величины с какой-либо шкалой, то точность прибора определяется половиной цены наименьшего деления шкалы прибора (например, при измерении длины линейкой или температуры термометром). Если измерения проводятся прибором, снабженным нониусом (например, штангенциркулем), точность прибора принимается равной разности между ценой деления прибора и ценой деления нониуса, т. е. точностью нониуса (так, точность штангенциркуля равна 0,1 мм).

При измерении с помощью прибора полученный результат отличается от истинного значения измеряемой величины и может быть больше или меньше его. Поэтому величину погрешности измерения записывают со знаками плюс и минус. Например, термометр с ценой деления $0{,}1°C$ показывает температуру $36{,}6°C$. Абсолютная погрешность измерения $\Delta t = \pm 0{,}05°C$, следовательно, измеряемая температура равна одному из чисел между $36{,}55°C$ и $36{,}65°C$. Результат измерения записывается в виде $t = (36{,}6 \pm 0{,}05)°C$.

Пусть значение $z = f(x, y)$ может быть рассчитано по измеренным с помощью приборов значениям величин *x* и *y*, абсолютные погрешности которых Δx и Δy. Абсолютная погрешность величины *z* рассчитывается по формуле

$$\Delta z = |dz| = \left| f'_x(x, y) \right| dx + \left| f'_y(x, y) \right| dy$$

где $dx = |\Delta x|$, $dy = |\Delta y|$ всегда положительны.

Относительная погрешность величины z определяется как $\dfrac{\Delta z}{z}$ и обычно выражается в процентах.

Классом точности или **приведенной относительной погрешностью** электроизмерительного прибора называют выраженное в процентах отношение максимальной абсолютной погрешности Δx к наибольшему значению измеряемой величины $x_{\max}$ (предел измерения), которое можно определить данным прибором:

$$k = \frac{\Delta x \cdot 100}{x_{\max}}, \quad \text{откуда} \quad \Delta x = \frac{k \cdot x_{\max}}{100}.$$

Отношение абсолютной погрешности к значению измеряемой величины определяет относительную погрешность, которая и используется в качестве характеристики точности прибора. Если относительная погрешность определена в долях (процентах) диапазона измерения, то ее называют **приведенной погрешностью**. По ее величине и судят о классе точности прибора. Относительная погрешность зависит от величины отсчета по прибору:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta x}{x} \cdot 100 = \frac{k \cdot x_{\max}}{x}.$$

§ 7.3. Прямые (непосредственные) измерения. Оценка случайных погрешностей прямых измерений

Для надежности оценки случайных погрешностей необходимо выполнить достаточно большое количество измерений n. Допустим, что в результате непосредственных измерений получены результаты $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$. Наиболее вероятное значение определяется как среднее арифметическое, которое при большом числе измерений принимается за истинное значение:

$$\bar{x} = x_{ист} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i .$$

Затем вычисляют среднюю квадратичную ошибку произведенных измерений:

$$S = \sqrt{\frac{(\bar{x} - x_1)^2 + (\bar{x} - x_2)^2 + ... + (\bar{x} - x_n)^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (\bar{x} - x_i)^2}{n-1}} .$$

При этом можно оценить наибольшую среднюю квадратичную ошибку отдельного измерения: $S_{наиб} = 3S$.

Следующий этап заключается в вычислении средней квадратичной ошибки среднего арифметического:

$$S_{\bar{x}} = \frac{S}{\sqrt{n}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{(\bar{x} - x_i)^2}{n(n-1)}} .$$

Ширина доверительного интервала около среднего значения $\bar{x}$ измеряемой величины будет определяться по абсолютной погрешности среднего арифметического:

$$\Delta\bar{x} = t_{\gamma, f} S_{\bar{x}} = t_{\gamma, f} \frac{S}{\sqrt{n}},$$

где $t_{\gamma, f}$ – так называемый коэффициент Стьюдента для числа наблюдений n и доверительной вероятности γ (табличная величина), $f = n - 1$ – число степеней свободы.

Обычно доверительная вероятность в условиях учебной лаборатории выбирается 0,95 или 95%. Это значит, что при многократном повторении опыта в одних и тех же условиях, ошибки в 95 случаях из 100 не превысят значения $\Delta\bar{x}$.

Интервальной оценкой измеряемой величины x будет доверительный интервал $(\bar{x} - \Delta\bar{x}\,; \bar{x} + \Delta\bar{x})$, в который попадает её истинное значение с заданной вероятностью γ. Результат измерения записывается:

$$x = \bar{x} \pm \Delta\bar{x} .$$

Эту запись можно понимать как неравенство: $\bar{x} - \Delta\bar{x} < x < \bar{x} + \Delta\bar{x}$.

Относительная погрешность: $\varepsilon = \frac{\Delta\bar{x}}{\bar{x}} \cdot 100\%$, $\varepsilon < 5\%$ в условиях учебной лаборатории.

§ 7.4. Косвенные измерения. Оценка случайных погрешностей косвенных измерений

Если величину у измеряют косвенным методом, т.е. она является функцией n независимых величин $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$: $y = f(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$, а значит $\bar{y} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)$. Средняя квадратичная ошибка среднего арифметического вычисляется по формуле:

$$S_{\bar{y}} = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} S_{\bar{x}_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} S_{\bar{x}_2}\right)^2 + ... + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} S_{\bar{x}_n}\right)^2},$$

где частные производные вычисляются для средних значений $\bar{x}_i$, $S_{\bar{x}_i}$ вычисляется по формуле средней квадратичной ошибки для непосредственного измерения $S_{\bar{x}} = \frac{S}{\sqrt{n}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{\left(\bar{x} - x_i\right)^2}{n(n-1)}}$.

Доверительная вероятность для всех погрешностей, связанных с аргументами x_i функции у задается одинаковый ($\gamma = 0{,}95$), такой же она задается и для *у*.

Абсолютная погрешность $\Delta\bar{y}$ среднего значения $\bar{y}$ определяется по формуле:

$$\Delta\bar{y} = t_{\gamma, f} S_{\bar{y}}.$$

Тогда $y = \bar{y} \pm \Delta\bar{y}$ или $\bar{y} - \Delta\bar{y} < y < \bar{y} + \Delta\bar{y}$.

Относительная погрешность $\bar{y}$ будет равна $\varepsilon = \frac{\Delta\bar{y}}{\bar{y}} \cdot 100\%$, $\varepsilon < 5\%$.

Пример 7.1. С помощью вискозиметра проведено измерение коэффициента вязкости спирта. Расчетная формула имеет вид:

$$\eta = \eta_0 \frac{\rho t}{\rho_0 t_0},$$

где η, ρ, и t – вязкость, плотность и время истечения спирта из капилляра вискозиметра; η_0, ρ_0, и t_0 – вязкость, плотность и время истечения воды (η_0=0,01 П; ρ_0= 998,2 кг/м^3; ρ=790,1 кг/м^3 – принять за точные числа). В пяти опытах получены следующие результаты:

t, с	80	79	81	83	78
t_0, с	48	50	47	51	46

Оценить истинное значение коэффициента вязкости с доверительной вероятностью γ=0,95. Оценить абсолютную и относительную погрешность измерения.

Решение.

Вычислим выборочные характеристики:

а) средние значения непосредственно измеренных величин t и t_0:

$$\bar{t} = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i}{n} = \frac{80+79+81+83+78}{5} = 80{,}2\ (\text{с});$$

$$\bar{t}_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_{0i}}{n} = \frac{48+50+47+51+46}{5} = 48{,}4\ (\text{с}),$$

б) оценки среднего квадратического отклонения среднего непосредственно измеренных величин:

$$S_{\bar{t}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(t_i - \bar{t})^2},$$

$$S_{\bar{t}} = \sqrt{\frac{1}{5\cdot 4}\begin{bmatrix}(80-80,2)^2+(79-80,2)^2+(81-80,2)^2+\\ +(83-80,2)^2+(78-80,2)^2\end{bmatrix}} = 0{,}86$$

$$S_{\overline{t_0}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(t_{0i} - \overline{t_0})^2},$$

$$S_{\overline{t_0}} = \sqrt{\frac{1}{5\cdot 4}\begin{bmatrix}(48-48,4)^2+(50-48,4)^2+(47-48,4)^2+\\ +(51-48,4)^2+(46-48,4)^2\end{bmatrix}} = 0{,}93$$

Среднее значение коэффициента вязкости:

$$\bar{\eta} = \eta_0 \frac{\rho \bar{t}}{\rho_0 \overline{t_0}},$$

$$\bar{\eta} = 0{,}01 \cdot \frac{790{,}1\cdot 80{,}2}{998{,}2\cdot 48{,}4} = 0{,}013\ (\Pi).$$

Оценка среднего квадратического отклонения среднего значения коэффициента вязкости:

$$S_{\bar{\eta}} = \sqrt{\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}S_{\bar{t}}\right)^2 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial t_0}S_{\overline{t_0}}\right)^2};$$

вычислим частные производные от $\eta = \eta_0 \frac{\rho t}{\rho_0 t_0}$, следующим образом:

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} = \frac{\eta_0\rho}{\rho_0 t_0} = \frac{0{,}01\cdot 790{,}1}{998{,}2\cdot 48{,}4} = 0{,}0002,$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial t_0}=-\frac{\eta_0\rho t}{\rho_0 {t_0}^2}=-\frac{0{,}01\cdot 790{,}1\cdot 80{,}2}{998{,}2\cdot 48{,}4^2}=-0{,}00027,$$

$$S_{\bar\eta}=\sqrt{(0{,}0002\cdot 0{,}86)^2+(-0{,}00027\cdot 0{,}93)^2}=0{,}0003.$$

Находим значение коэффициента Стьюдента из приложения 4:

$$t_{0,95;4}=2{,}78.$$

Абсолютная погрешность:

$$\Delta\bar\eta=S_{\bar\eta}\cdot t_{\gamma;f}=0{,}0003\cdot 2{,}78=0{,}0008\ (\text{П}).$$

Относительная погрешность:

$$\delta_\eta=\frac{\Delta\bar\eta}{\bar\eta}=\frac{0{,}0008}{0{,}013}=0{,}06=6\%.$$

Истинное значение коэффициента вязкости:

$$\eta=(0{,}013\pm 0{,}0008)\ (\text{П}).$$

Вопросы для самоконтроля

1. Что изучает теория ошибок?
2. В чем заключается цель любого измерения некоторой физической величины?
3. Дайте определение прямому измерению, косвенному измерению.
4. Перечислите виды ошибок. Дайте соответствующие определения и приведите примеры.
5. Что называется абсолютной погрешностью измерения? Запишите формулу.
6. Что называется относительной погрешностью измерения? Запишите формулу.
7. Что называется точностью измерительного прибора?
8. Дайте определение классу точности. Запишите формулу.
9. Что такое приведенная погрешность? Запишите формулу.
10. Перечислите и дайте определения каждому этапу оценки случайных погрешностей прямых измерений.
11. Что такое коэффициент Стьюдента? Правила нахождения данного коэффициента.
12. Перечислите и дайте определения каждому этапу оценки случайных погрешностей косвенных измерений.

Задания для решения

1. При подсчете количества листьев у одного из лекарственных растений были получены следующие данные: 8, 10, 7, 9, 11, 6, 9, 8, 10,

7. Вычислить выборочную среднюю и оценку среднего квадратического отклонения выборочной средней.

2. В результате десяти измерений диаметра капилляра в стенке легочных альвеол были получены следующие данные: 2,83 мкм; 2,82; 2,81; 2,85; 2,87; 2,86; 2,83; 2,85; 2,83; 2,84 мкм. Вычислить оценку истинной величины диаметра капилляра и абсолютную и относительную погрешности при доверительной вероятности 0,95.

3. В результате десяти одинаковых проб были получены следующие значения содержания марганца: 0,69%; 0,70; 0,67; 0,66; 0,67; 0,68; 0,67; 0,69; 0,68; 0,68%. Вычислить оценку истинного содержания марганца и абсолютную и относительную погрешности при доверительной вероятности 0,95.

4. При определении микроаналитическим способом содержания азота в данной пробе были получены следующие результаты: 9,29%; 9,38; 9,35; 9,43; 9,53; 9,48; 9,61; 9,68%. Оценить истинное содержание в пробе и абсолютную и относительную погрешности при доверительной вероятности 0,95.

5. При фотоэлектроколориметрическом определении концентрации ацетилсалициловой кислоты на основании реакции с сульфатом меди и пиридином были получены следующие результаты: 99,2%; 99,0; 98,9; 99,3; 98,8; 99,1 %. Вычислить среднее значение полученных результатов и абсолютную и относительную погрешности при доверительной вероятности 0,95.

6. С помощью колориметра-нефелометра проведено измерение концентрации C_x неизвестного окрашенного раствора путем сравнения с раствором известной концентрации C_0. Расчетная формула для определения концентрации вещества имеет вид:

$$C_x = C_0 \frac{d_0}{d_x},$$

где d_0 и d_x – толщины слоев, одинаково поглощающих монохроматический свет, $C_0 = 2\%$ (принять за точное число). В пяти опытах получены следующие результаты:

d_0, мм	5,65	5,70	5,80	5,75	5,70
d_x, мм	8,55	8,60	8,65	8,60	8,65

Оценить истинное значение измеряемой концентрации с доверительной вероятностью $\gamma = 0{,}95$. Оценить абсолютную и относительную погрешность измерения.

7. С помощью моста Уитстона проведено измерение неизвестного сопротивления. Расчетная формула имеет вид:

$$R = R_м \frac{l_1}{l_2},$$

где $R_м$ = 100 Ом – стандартное сопротивление (принять за точное число), l_1 и l_2 – длины плеч реохорда. В пяти опытах получены следующие результаты:

l_1, см	33,4	33,5	33,6	33,5	33,7
l_2, см	66,6	66,5	66,4	66,5	66,3

Оценить истинное значение сопротивления с доверительной вероятностью $\gamma = 0{,}95$. Оценить абсолютную и относительную погрешность измерения.

8. Мощность тока P определена по силе тока I и напряжению U, которые измерялись непосредственно и были получены следующие результаты:

I, А	0,48	0,50	0,49	0,52	0,56
U, В	214	212	213	210	206

Расчетная формула имеет вид:

$$P = IU$$

Оценить истинное значение мощности тока с доверительной вероятностью $\gamma = 0{,}95$. Оценить абсолютную и относительную погрешность измерения.

9. Объем цилиндра $V = (\pi/4)hd^2$, где h – высота, d – диаметр цилиндра. В пяти опытах получены следующие результаты:

h, мм	51	52	56	54	53
d, мм	30	32	31	35	29

Оценить истинное значение объема цилиндра с доверительной вероятностью $\gamma = 0{,}95$. Оценить абсолютную и относительную погрешность измерения.

10. Изготовлены таблетки цилиндрической формы. Взвешены 5 таблеток и измерены толщина h и диаметр d каждой. Результаты измерений занесены в таблицу:

m_i, г	3,30	3,32	3,39	3,41	3,40
h_i, см	1,06	1,07	1,06	1,10	1,08
d_i, см	1,84	1,84	1,88	1,88	1,81

Вычислить плотность таблетки по формуле:

$$\rho = \frac{4m}{\pi d^2 h}$$

с доверительной вероятностью γ=0,95. Оценить абсолютную и относительную погрешность измерения.

ГЛАВА VIII
ПРОВЕРКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ

§ 8.1. Понятие статистической гипотезы

При решении прикладных задач, имеющих вероятностную постановку, зачастую необходимо установить неизвестный закон распределения генеральной совокупности, в других случаях при известном законе распределения требуется уточнить параметры распределения, равенство их определенному числу и сравнить либо параметры по различным выборкам, либо сами выборки.

В подобных случаях выдвигаются определенные гипотезы, например «закон распределения генеральной совокупности, является биномиальным» или «среднее генеральной совокупности, распределенной по нормальному закону, равно нулю» и т.д. Возможны и другие гипотезы относительно параметров и выборок.

Статистической гипотезой называют предположение о неизвестном законе распределения генеральной совокупности либо о параметрах известных распределений. Статистическая гипотеза проверяется, исходя из выборочных данных, статистическими методами. К статистической проверке гипотез сводятся задачи сравнительной проверки и оценки различных процессов: эффективности лечения, продолжительности болезни и восстановительного периода, тяжести заболевания, сравнения лечебно-диагностических методик, различных характеристик процесса, препаратов и медицинской техники, экономичности, мер профилактики и т.д.

Утверждения типа «В 2023 г. Земля может сойти со своей орбиты» (Нострадамус), «Тысячу лет назад нашу планету посещали инопланетяне» являются гипотезами, но не статистическими, так как эти события являются уникальными (не массовыми).

Статистические гипотезы, не использующие допущений о конкретном законе распределения, называют непараметрическими гипотезами, в противном случае гипотезы называют параметрическими. Непараметрические гипотезы – понятие более общее, нежели параметрические, так как методика их проверки не требует знания закона распределения, что, несомненно, является их достоинством. Однако методы проверки параметрических гипотез более эффективны, так как используют большее количество информации о случайных величинах (закон распределения известен).

Статистические гипотезы бывают простыми и сложными. **Простой** называют гипотезу, которая полностью однозначно определяет функцию распределения (т.е. закон распределения) случайной величины. Гипотезу называют **сложной**, если она состоит из объединения конечного или бесконечного числа простых гипотез.

Основную гипотезу, которую намереваются проверять, называют **нулевой гипотезой** и обычно обозначают H_0.

Для каждой нулевой гипотезы обязательно существует альтернативная гипотеза, противоречащая нулевой. Такую альтернативную гипотезу называют **конкурирующей гипотезой.** Обозначим ее H_1.

Нулевая и конкурирующая гипотезы всегда несовместны, но не обязательно образуют полную систему событий.

Выдвинутые гипотезы H_0 и H_1 проверяются на истинность на основе выборочных наблюдаемых данных статистическими методами, т.е., обладая лишь информацией по выборке (неполной информацией), о генеральной совокупности можно судить не однозначно, а с определенной вероятностью. При этом, полагая **нулевую гипотезу** справедливой (потому она и считается основной, что из каких-то соображений мы верим в ее истинность), мы заинтересованы в том, чтобы признать нулевую гипотезу верной, а конкурирующую гипотезу отвергнуть. Но вполне возможно, что справедлива не нулевая, а конкурирующая гипотеза, в этом случае наш интерес, наоборот, в наибольшей вероятности принятия гипотезы H_1 и, следовательно, в отвержении нулевой гипотезы H_0.

Например, пусть партию лекарств контролируют по небольшой выборке и сравнивают с нормой; тогда нулевая гипотеза H_0: выпущенная партия лекарств нестандартна (брак), а конкурирующая H_1: партия соответствует норме.

Таким образом, задача проверки гипотез заключается в том, чтобы на основании анализа выборочных данных (неполная информация) принять решение о справедливости одной из гипотез.

§ 8.2. Ошибки первого и второго рода. Уровень значимости

При проверке гипотез из-за наличия неполной информации могут быть допущены ошибки двух видов (см. таблицу 8.1):

Ошибка первого рода заключается в том, что верная нулевая гипотеза H_0 отвергается, а принимается конкурирующая ложная гипотеза H_1.

Ошибка второго рода заключается в том, что ложная гипотеза H_0 принимается, хотя на самом деле верна конкурирующая гипотеза H_1.

Таблица 8.1

В действительности / Принята гипотеза на основании исследования	Верна гипотеза H_0, ложна H_1	Верна гипотеза H_1, ложна H_0
Принята гипотеза H_0	Гипотеза H_0 верна и принята	Гипотеза H_1 верна, но принята ложная гипотеза H_0
Принята гипотеза H_1	Гипотеза H_0 верна, но принята ложная гипотеза H_1	Гипотеза H_1 верна и принята, ложная гипотеза H_0 отвергнута

Отметим, что гипотезы H_0 и H_1 в исследовании не равноправны. Статистическая проверка осуществляется для нулевой гипотезы H_0, поэтому гипотезу H_0 и называют основной. Проверить нулевую гипотезу необходимо так, чтобы возможность ошибок обоих типов свести к минимуму.

Число α – вероятность ошибки первого рода (вероятность отклонения нулевой гипотезы, когда она на самом деле верна) – называют **уровнем значимости.**

Аналогично вероятность допустить ошибку второго рода обозначим β.

Вероятность не допустить ошибку второго рода (т.е. при справедливости конкурирующей гипотезы H_1, вероятность принять эту гипотезу) называют **мощностью критерия (чувствительностью критерия)**.

Мощность критерия равна $1-\beta$. Понятно, что чем больше это значение, тем лучше, качественнее работает наш критерий. В медицинских исследованиях обычно используют $\alpha = 0{,}05$ или $\alpha = 0{,}01$, а значение $\beta = 0{,}2$ или $\beta = 0{,}1$.

Задача исследователя – минимизировать обе вероятности – и α, и β. Но эти вероятности оказываются взаимосвязанными и, уменьшая одну из них при фиксированных условиях, мы неизбежно компенсируем достигнутое уменьшение ростом вероятности другой ошибки. Единственный способ одновременного уменьшения вероятностей обеих ошибок – это увеличение объема выборки (вполне естественно, что, увеличивая объем выборки, получаем больше информации о генеральной совокупности, и вероятность ошибок уменьшается).

Обычно поступают следующим образом: фиксируют уровень значимости α, т.е. задают границу вероятности отклонить нулевую гипотезу H_0, когда она верна, и пытаются провести исследование так, чтобы значение β оказалось наименьшим. Стандартными уровнями значимости α, для которых построены соответствующие таблицы, считаются числа 0,2; 0,1; 0,05; 0,02; 0,01; 0,005; 0,002; 0,001.

Естественным является желание выбрать α как можно меньшим, но тогда вероятность ошибки второго рода β может оказаться слишком большой (мощность критерия невелика). Разумный компромисс между значениями α и β находят, исходя из тяжести последствий каждой из ошибок. Например, пусть проверяется гипотеза отсутствия у пациента некоторого заболевания. Признаком заболевания служит значение определенного показателя (к примеру, артериальное давление), тогда нулевая гипотеза H_0 – значение показателя в норме, т.е. пациент здоров. Конкурирующая гипотеза H_1 – значение показателя отличается от нормы, т.е. пациент болен. В этом случае ошибка первого рода – отклонение нулевой гипотезы, когда она верна, т.е. признаем человека больным, когда он на самом деле здоров. Эта ошибка приводит к некоторым неудобствам для пациента, который должен пройти дополнительное обследование или курс лечения, и обычно не грозит серьезными последствиями. Совсем иная картина в случае допуска ошибки второго рода – принять нулевую гипотезу, когда она неверна, т.е. признать человека здоровым, когда он на самом деле болен: фактически происходит отказ от лечения больного, и в этом случае последствия ошибки второго рода могут оказаться самыми плачевными.

Следовательно, в рассмотренном примере допустимо пожертвовать высоким уровнем значимости α с целью уменьшить вероятность ошибки второго рода β. Можно привести примеры других случаев, когда, наоборот, более существенным по тяжести последствий оказывается выбор наименьшего разумного значения α, а не β.

Таким образом, при выборе гипотез нулевой гипотезой (по сравнению с альтернативной) должна быть та, которую более опасно ошибочно отвергнуть.

§8.3. Статистический критерий. Критические области

Для проверки принятой гипотезы используют случайную величину K, являющуюся функцией от выборочных данных и называемую статистическим критерием.

Статистический критерий – это правило (формула), позволяющее по данным выборки принять либо отвергнуть нулевую гипотезу.

Статистический критерий, являясь случайной величиной, имеет какое-то вероятностное распределение. Обычно критерий выбирают таким, чтобы он имел одно из следующих распределений: нормальное, χ-квадрат, распределение Стьюдента, распределение Фишера.

Совокупность значений, при которых нулевую гипотезу следует принять, называют **областью принятия гипотезы.** Совокупность значений, при которых нулевую гипотезу следует отвергнуть, называют **критической областью.**

Поскольку все возможные значения критерия *K* образуют интервал, то критическая область и область принятия гипотезы также являются интервалами. Эти интервалы не могут пересекаться и, следовательно, имеются граничные точки, разделяющие данные области.

Точки, отделяющие критическую область от области принятия гипотезы, называют **критическими точками.** Обозначим их $k_{кр}$.

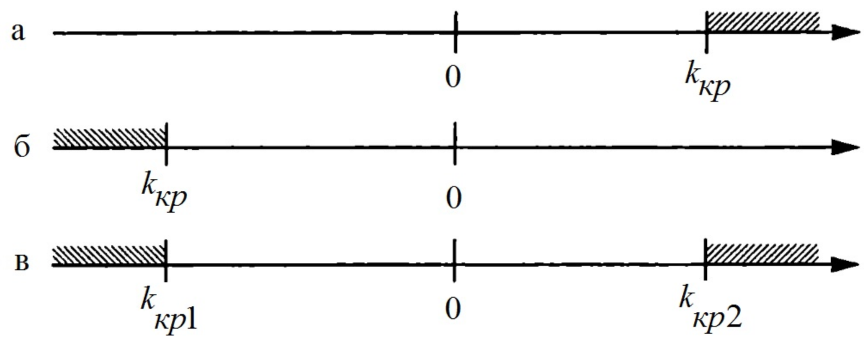


Рис. 8.1

Критическая область в зависимости от выбора $k_{кр}$ может быть **односторонней** (правосторонней или левосторонней) или **двусторонней.**

В случае, изображенном на рис. 8.1 (а), критическая область определяется неравенством $K > k_{кр}$, где $k_{кр} > 0$, и называется **правосторонней.**

В случае, изображенном на рис. 8.1 (б), критическая область определяется неравенством $K < k_{кр}$, где $k_{кр} < 0$, и называется **левосторонней.**

В случае, изображенном на рис. 8.1 (в), **двусторонняя** критическая область определяется двумя неравенствами $K < k_{кр1}$, $K > k_{кр2}$ где $k_{кр1} < k_{кр2}$. Часто двустороннюю критическую область выбирают симметричной относительно нуля, тогда $(-k_{кр1}) = k_{кр2} = k_{кр}$ и $|K| > k_{кр}$.

Как видим, критическая область полностью определяется одним или двумя (в случае двусторонней и несимметричной областей) критическими значениями. И здесь возникают два вопроса, первый из которых – по какому принципу выбирать критическую область; второй – каким образом определить критические значения $k_{кр}$?

Принцип построения критической области таков: критическая область – эта область возможных значений критерия K, принимаемых крайне редко, т.е. достаточно мала вероятность, что в результате наблюдения за одной выборкой случайная величина K, созданная по этой выборке, примет значение из критической области. Обозначим эту вероятность попадания критерия K в критическую область символом α (это значение α является уровнем значимости).

Тогда критическая область при выбранном малом значении α определяется условием $P(K > k_{кр}) = \alpha$ в случае правосторонней критической области, $P(K < k_{кр}) = \alpha$ в случае левосторонней критической области. В случае двусторонней критической области

$$P(K < k_{кр1}) + P(K > k_{кр2}) = \alpha.$$

Заметим, что в последнем равенстве критические точки $k_{кр1}$ и $k_{кр2}$ определяются неоднозначно. Если же распределение критерия К симметрично относительно нуля (например, распределение Стьюдента или нормальное распределение) и критические точки $-k_{кр1} = \kappa_{кр2} = \kappa_{кр}$, то $P(K < k_{кр1}) = P(K > k_{кр2})$ и, следовательно, имеем

$$P(K > k_{кр}) = \frac{\alpha}{2}; \qquad P(K < -k_{кр}) = \frac{\alpha}{2}.$$

Определив критическую область, а, следовательно, и область принятия гипотезы, по выборке вычисляем наблюдаемое значение критерия K. Из частотной интерпретации следует вывод:

– если значение K принадлежит области принятия гипотезы, то нулевая гипотеза H_0 не противоречит наблюдениям и принимается;

– если значение K принадлежит критической области, то нулевая гипотеза H_0 считается опровергнутой, и принимается конкурирующая гипотеза H_1.

В случае принятия нулевой гипотезы считается, что различия между наблюдёнными значениями и истинными обусловлены случайными причинами и являются **незначимыми** (непринципиальными).

В случае отторжения нулевой гипотезы говорят, что различия между наблюдёнными значениями и теоретическими (согласно нулевой гипотезе) **значимы**, т.е. обусловлены принципиальными причинами: ошибочностью нулевой гипотезы.

Еще раз отметим, что опровержение гипотезы H_0 на основании опыта вовсе не равноценно логическому опровержению. Вполне возможно, что нам просто не повезло с выборкой: среди множества всех возможных выборок заданного объема n попалась именно такая редкая, которая приводит значение критерия K в критическую область.

Критерии бывают параметрические и непараметрические. **Параметрические критерии** используются, если выборки взяты из генеральной совокупности, которая подчиняется известному, например, нормальному закону распределения. Нормальность распределения выборки должна быть статистически доказана до применения параметрических критериев.

Непараметрические критерии используют, если нет подчинения распределения выборки нормальному закону. Например, если объём выборки настолько мал, что невозможно оценить закон распределения данных в выборке. Параметрические критерии являются более мощными, чем непараметрические в обнаружении реального эффекта.

Критерии общего характера проверки статистических гипотез называют **критериями значимости**. В случае проверки гипотез о согласии выборочного и теоретического распределений критерии значимости называют **критериями согласия**.

Процедура проверки гипотез

Процедура проверки гипотез представляет собой правило, руководствуясь которым, принимается статистически обоснованное решение о справедливости одной из них.

От исследователя, использующего статистическую проверку гипотез в прикладных задачах, требуется научиться пользоваться существующими критериями.

Проверка гипотез обычно проходит следующие этапы.

1. Исследователь набирает первичный статистический материал в виде выборок из одной или нескольких генеральных совокупностей.

2. Исследователь формулирует основную (H_0) и альтернативную (H_1) гипотезы, а также выбирает уровень значимости α (0,01 или 0,05), соответствующие целям исследования.

3. Выбирают метод проверки, который подходит в данной ситуации, и по соответствующим формулам вычисляют значение статистического критерия для имеющихся данных (выборок).

4. По таблицам, соответствующим выбранному методу, находят границу критической области для принятого уровня значимости.

5. Принимается решение о справедливости гипотезы H_0 или H_1.

Если значение критерия, вычисленного в п.3, принадлежит критической области (п. 4), то основная гипотеза H_0 отвергается и принимается альтернативная гипотеза H_1 (различия между наблюдаемыми значениями и теоретическими значимы, т. е. обусловлены ошибочностью нулевой гипотезы).

Если значения критерия не попадают в критическую область, то гипотеза H_0 принимается (различия не значимы и обусловлены случайными причинами).

В ходе проверки статистических гипотез, кроме вычисления статистического критерия K, в современных статистических пакетах вычисляется также соответствующее значение p, где p – это вероятность справедливости H_0.

Сравнивая полученное значение p с принятым уровнем значимости α, делают выводы о гипотезах:

если $p > \alpha$ (α – принятый уровень значимости, обычно 0,05), то H_0 принимают (различия незначимы);

если $p < \alpha$, то H_0 отклоняют (различия статистически значимы при $p < 0{,}05$).

§ 8.4. Зависимые и независимые выборки. Сравнение дисперсий двух нормальных генеральных совокупностей.

Примеры **независимых** выборок:

1) параметры двух групп пациентов, к которым применялись различные методики лечения;

2) параметры двух групп пациентов, к одной из которых (опытная группа) применялось воздействие методики, а к другой, контрольной, – нет.

Примеры **зависимых** (связанных или сопряжённых выборок):

1) параметры одной и той же группы пациентов до и после воздействия какого-либо фактора, например, методики лечения;

2) параметры различных частей одного и того же объекта, например, состояние двух конечностей, одна из которых подвергалась лечению, а другая – нет.

Перейдем к рассмотрению некоторых наиболее популярных статистических гипотез, используемых в медицинских исследованиях, и примеров их использования.

Сравнение дисперсий двух нормальных генеральных совокупностей

Во многих клинических исследованиях важной является проверка гипотезы о равенстве генеральных дисперсий двух нормальных выборок. Эта задача может быть решена с помощью **критерия Фишера.**

Пусть имеются две нормальные генеральные совокупности *X* и *Y*, дисперсии которых $D(X)$ и $D(Y)$ неизвестны. По выборкам

$X_1, X_2, ..., X_n$ и $Y_1, Y_2, ... Y_m$ объемов n и m соответственно требуется сравнить дисперсии. Подобные задачи возникают в случаях сравнения точности измерений, точности приборов, качества методик. Поскольку дисперсия характеризует степень сосредоточения (рассеяния) значений относительно среднего, то наилучшей характеристикой является та, у которой дисперсия меньше.

Из множества различных гипотез относительно дисперсий (соотношений между дисперсиями) в качестве нулевой гипотезы обычно выдвигают гипотезу равенства дисперсий:

$$H_0 : D(X) = D(Y)$$

Тогда для конкурирующей гипотезы остаются следующие возможности:

1) $D(X) \neq D(Y)$; 2) $D(X) > D(Y)$; 3) $D(X) < D(Y)$.

Понятно, что случаи 2) и 3) принципиального различия в методике не имеют, так как любое из этих неравенств получается из другого, если X и Y поменять местами. Таким образом, достаточно рассмотреть два случая конкурирующей гипотезы.

В нулевой гипотезе $H_0 : D(X) = D(Y)$ числа $D(X)$ и $D(Y)$ заменим характеристиками, связанными с выборками:

$$D(X) = M(S_x^2), \qquad D(Y) = M(S_y^2),$$

где S_x^2 и S_y^2 – исправленные выборочные дисперсии рассматриваемых генеральных совокупностей. Тогда $H_0 : M(S_x^2) = M(S_y^2)$.

Для проверки нулевой гипотезы используем в качестве критерия статистику F отношения двух исправленных выборочных дисперсий S_x^2 и S_y^2 с $(n-1)$ и $(m-1)$ степенями свободы соответственно.

Для определенности условимся в отношении оценок и числителем ставить большую из этих оценок, а знаменателем – меньшую. Обозначив их $S_б^2$ и $S_м^2$, получим критерий

$$F = \frac{S_б^2}{S_м^2}.$$

Далее достаточно выбрать уровень значимости а (например, наиболее распространенные в медицинских приложениях уровни значимости $\alpha = 0{,}05$ или 0,01) и по таблице определить критические точки распределения *F*. И здесь возникает вопрос, какую критическую область выбрать: одностороннюю либо двустороннюю. Наш выбор зависит от вида конкурирующей гипотезы H_1. Если есть основания предполагать, что одна из дисперсий обязательно не меньше, чем другая, например $D(X) \geq D(Y)$, то

$$H_0: D(X) = D(Y);$$
$$H_1: D(X) > D(Y).$$

В этом случае критическая область односторонняя, а именно правосторонняя.

Если же нет оснований полагать, что одна из дисперсий обязательно больше, чем другая, то конкурирующая гипотеза
$$H_1: D(X) \neq D(Y)$$
и критическая область оказывается двусторонней, а, следовательно, уровень значимости α должен быть поделен между двумя интервалами критической области.

Далее находим реальное значение F, наблюдаемое, а точнее, вычисляемое по выборочным данным. Обозначим его $F_{набл}$. Если окажется, что $F_{набл}$ приняло значение из критической области, то нулевую гипотезу отбрасываем и принимаем конкурирующую, в противном случае, когда $F_{набл}$ оказывается в области принятия гипотезы, нулевую гипотезу принимаем и полагаем, что она не противоречит опытным данным.

Рассмотрим оба возможных случая конкурирующей гипотезы.

Первый случай:

Пусть
$$H_0: D(X) = D(Y); \qquad H_1: D(X) > D(Y).$$

Тогда

- по выборкам $X_1, X_2, ..., X_n$ и $Y_1, Y_2, ...Y_m$ вычисляем конкретные значения исправленных выборочных дисперсий S_x^2 и S_y^2;
- находим число
$$F_{набл} = \frac{S_б^2}{S_м^2},$$
где $S_б^2$ и $S_м^2$ – соответственно большее и меньшее из чисел S_x^2 и S_y^2 (при выбранной конкурирующей гипотезе $D(X) > D(Y)$, естественно, $S_б^2 = S_x^2$, $S_м^2 = S_y^2$);
- выбираем уровень значимости α и для правосторонней критической области находим по таблице (приложение 5) граничное значение: критическую точку $k_{кр}$ (при этом $f_1,$ f_2 - количество степеней свободы числителя и знаменателя соответственно);
- обозначим $k_{кр} = F_{кр}(\alpha; f_1 = n-1, f_2 = m-1)$; сравниваем $F_{набл}$ и $F_{кр}$;
- делаем выводы: если $|F_{набл}| > F_{кр}$, то при выбранном уровне значимости различие дисперсий значимо, нулевая гипотеза отбрасыва-

ется и принимается конкурирующая, если же $|F_{набл}| < F_{кр}$, то принимается гипотеза H_0 как не противоречащая опытным данным.

Второй случай:

Пусть

$$H_0 : D(X) = D(Y); \qquad H_1 : D(X) \neq D(Y).$$

Тогда

• по выборкам $X_1, X_2, ..., X_n$ и $Y_1, Y_2, ... Y_m$ вычисляем конкретные значения исправленных выборочных дисперсий S_x^2 и S_y^2;

• находим число

$$F_{набл} = \frac{S_б^2}{S_м^2},$$

где $S_б^2$ и $S_м^2$ – соответственно большее и меньшее из чисел S_x^2 и S_y^2;

• выбираем уровень значимости α и находим критическую точку

$$k_{кр} = F_{кр}\left(\frac{\alpha}{2}; f_1, f_2\right);$$

• сравниваем $F_{набл}$ и $F_{кр}$ и делаем выводы: если $|F_{набл}| > F_{кр}$, то при выбранном уровне значимости различие дисперсий значимо, нулевая гипотеза отвергается, если же $|F_{набл}| < F_{кр}$, то принимается гипотеза H_0 как не противоречащая опытным данным.

Пример 8.1. Пусть при лечении некоторого заболевания применяются две методики: *A* и *B*. Эффективность методик характеризуется изменением численных значений определенного показателя. Отобраны две однородные группы больных: первая численностью $n = 15$ человек, а вторая – $m = 10$ человек. В первой группе (с методикой *A*) значения рассмотренного показателя $X_1, X_2, ..., X_{15}$, во второй (с методикой *B*) – $Y_1, Y_2, ... Y_{10}$. Известно, что соответствующие генеральные совокупности *X* и *Y* имеют нормальное распределение. Оказалось, что для обеих групп средние значения показателя $\overline{x}$ и $\overline{y}$ практически равны, а исправленные выборочные дисперсии $S_x^2 = 21{,}5$; $S_y^2 = 32{,}8$. Требуется сопоставить две методики лечения при уровне значимости $\alpha = 0{,}1$.

Решение.

Поскольку средние значения наблюдаемого показателя в обеих группах равны, то эффективность методик в среднем одинакова. Оценим стабильность результата, т.е. различный разброс значений показателя в группах значим (вызван особенностями применяемых методик) или незначим (вызван случайными причинами, например объясняется конкретным подбором больных в группы, малым объемом выборок и т.д.).

Выдвигаем нулевую гипотезу

$$H_0 : D(X) = D(Y),$$

конкурирующую гипотезу

$$H_1 : D(X) \neq D(Y).$$

При такой конкурирующей гипотезе критическая область должна быть двусторонней и критическую точку ищем исходя из соотношения $k_{кр} = F_{кр}\left(\frac{\alpha}{2}; f_1, f_2\right)$. Так как выбранное значение $\alpha = 0{,}1$, то $\frac{\alpha}{2} = 0{,}05$. Для того чтобы воспользоваться таблицей, необходимо определить также f_1 и f_2. Поскольку большее значение исправленной выборочной дисперсии $S_y^2 = 32{,}8$ соответствует второй группе, то $f_1 = m - 1 = 10 - 1 = 9$, $f_2 = n - 1 = 15 - 1 = 14$.

По таблице (приложение 5) находим критическую точку

$$F_{кр}\left(\frac{\alpha}{2}; f_1, f_2\right) = F_{кр}(0{,}05; 9; 14) = 2{,}65.$$

Вычислим $F_{набл}$. По нашим данным $S_б^2 = S_y^2 = 32{,}8$, $S_м^2 = S_x^2 = 21{,}5$, тогда

$$F_{набл} = \frac{S_б^2}{S_м^2} = \frac{32{,}8}{21{,}5} \approx 1{,}526.$$

Сравнив $F_{набл} = 1{,}526$ с $F_{кр} = 2{,}65$, констатируем, что значение $F_{набл}$ попадает не в критическую область, а в область принятия гипотезы.

Вывод: Принимается нулевая гипотеза как не противоречащая опытным данным. Следовательно, разброс значений показателя при обеих методиках не позволяет судить о значимых различиях: $D(X) = D(Y)$. Различие выборочных дисперсий S_x^2 и S_y^2 объясняется случайными причинами. Таким образом, статистически значимых различий методик не установлено.

§ 8.5. Сравнение средних двух нормальных генеральных совокупностей при известных дисперсиях

Пусть имеются две генеральные совокупности X и Y. Исходя из выборочных данных, требуется сравнить математические ожидания $M(X)$ и $M(Y)$.

Подобная задача возникает при сравнении двух групп элементов, подвергшихся определенному воздействию (например, двух групп больных, проходящих курс лечения по различным методикам, или одна группа больных принимает какой-то лекарственный препарат, а другая группа – контрольная – принимает плацебо). При этом сравнение средних позволяет судить о степени воздействия, о значимости возможных эффектов воздействия или, наоборот, об их отсутствии.

Рассмотрим случай, когда генеральные совокупности X и Y имеют нормальное распределение, что в прикладных задачах бывает достаточно часто.

Данными для исследования будут служить две независимые выборки: $X_1, X_2, ..., X_n$ и $Y_1, Y_2, ... Y_m$ объемов n и m соответственно. Схема исследования – выдвижение гипотез, нулевой и конкурирующей, и использование статистики определенного вида в качестве критерия.

Нулевая гипотеза о равенстве математических ожиданий $M(X) = M(Y)$ равносильна гипотезе

$$H_0 : M(\overline{X}) = M(\overline{Y})$$

так как $M(\overline{X}) = M(X)$ и $M(\overline{Y}) = M(Y)$ ввиду несмещенности оценок математического ожидания. Поскольку значения выборочных средних X и Y, вообще говоря, различны, то необходимо проверить, значимо это различие (вызвано принципиальными соображениями) либо незначимо (вызвано случайными обстоятельствами, методами отбора именно этих, а не других элементов в выборку, малым количеством наблюдений).

Критерием для проверки гипотезы H_0 может служить статистика

$$Z = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\frac{S_x^2}{n} + \frac{S_y^2}{m}}}.$$

Вернемся к проверке выдвинутой нулевой гипотезы. Схема действий та же самая, что и в предыдущем разделе. В противовес H_0 назначается конкурирующая гипотеза H_1. Далее по выборочным значениям вычисляем значение $Z_{набл}$, выбираем уровень значимости α и находим критическую точку. Критическое значение $Z_{кр}$ определяется соотношением:

$$\Phi(Z_{кр}) = \frac{1-\alpha}{2}$$

где $\Phi(z)$ – функция Лапласа (приложение 6).

Сравниваем $Z_{набл}$ и $Z_{кр}$ и делаем выводы: если $|Z_{набл}| > Z_{кр}$, то при выбранном уровне значимости различие дисперсий значимо, нулевая гипотеза отвергается, если же $|Z_{набл}| < Z_{кр}$, то принимается гипотеза H_0 как не противоречащая опытным данным.

§ 8.6. Критерий Стьюдента. Сравнение средних двух нормальных генеральных совокупностей при неизвестных одинаковых дисперсиях

Пусть имеются генеральные совокупности X и Y, нормально распределенные. Требуется сравнить математические ожидания $M(X)$ и $M(Y)$, как и в случае, рассмотренном в параграфе 8.5. Но в отличие от указанного случая дисперсии генеральных совокупностей неизвестны. Причем удовлетворительных точечных оценок для этих дисперсий также невозможно получить, например, в случае малых выборок. Поэтому метод, рассмотренный ранее, не работает (для него дисперсии должны быть известны).

Приведем другую методику, используя взамен утраченного условия известности дисперсий, условие равенства неизвестных нам дисперсий $D(X) = D(Y)$. Это условие может быть принято из физических соображений (например, две партии препаратов, изготовленных одним и тем же коллективом работников) либо проверено (что весьма желательно) с помощью критерия Фишера.

Для сравнения $M(X)$ и $M(Y)$ в качестве нулевой гипотезы естественно выбрать

$$H_0 : M(X) = M(Y),$$

которая равносильна гипотезе

$$H_0 : M(\overline{X}) = M(\overline{Y}),$$

где X и Y – выборочные средние, найденные из независимых выборок $X_1, X_2, ..., X_n$ и $Y_1, Y_2, ...Y_m$ объемов n и m соответственно. Предполагаем числа n и m достаточно малыми (обычно не более 30).

Для проверки гипотез о равенстве генеральных средних при одинаковых генеральных дисперсиях применяется t-критерий Стьюдента, значение которого $t_{набл}$ вычисляется по формуле:

$$t_{набл.} = \frac{\overline{x} - \overline{y}}{\sqrt{(n-1) \cdot S_x^2 + (m-1) \cdot S_y^2}} \cdot \sqrt{\frac{n \cdot m(n+m-2)}{n+m}},$$

где S_x^2 и S_x^2 – выборочные дисперсии, $\overline{x}$ и $\overline{y}$ – средние значения выборок.

Критическое значение $t_{кр}(\alpha, f = n+m-2)$ распределения Стьюдента находим по таблице (приложение 7) для заданного уровня значимости.

Сравниваем $t_{набл}$ и $t_{кр}$ и делаем выводы: если $|t_{набл}| > t_{кр}$, то при выбранном уровне значимости различие дисперсий значимо, нулевая гипотеза отвергается, если же $|t_{набл}| < t_{кр}$, то принимается гипотеза H_0 как не противоречащая опытным данным.

Данный критерий применяется в случае малых выборок, что свойственно медицинским и биологическим задачам, а это обусловливает многочисленные приложения критерия Стьюдента.

Пример 8.2. Препарат из группы антагонистов кальция – нифедипин – обладает способностью расширять сосуды, и его применяют при лечении ишемической болезни сердца. Ш. Хейл и соавторы измеряли диаметр коронарных артерий после приёма нифедипина и плацебо, и получили следующие две выборки данных диаметра коронарных артерий (в миллиметрах).

Плацебо: 2,5; 2,2; 2,6; 2,0; 2,1; 1,8; 2,4; 2,3; 2,7; 2,7; 1,9;

Нифедипин:2,5; 1,7; 1,5; 2,5; 1,4; 1,9; 2,3; 2,0; 2,6; 2,3; 2,2.

Позволяют ли приведенные данные считать, что нифедипин влияет на диаметр коронарных артерий?

Решение.

В данной задаче необходимо исследовать, значимо или незначимо различаются средние, представленные двумя выборками. Обозначим генеральную совокупность, из которой извлечена первая выборка (плацебо), через *X*. Соответственно обозначим генеральную совокупность, из которой извлечена вторая выборка (нифедипин), через *Y*. Авторы полагали, что обе генеральные совокупности *X* и *Y* имеют нормальное распределение (эту гипотезу желательно проверить статистическими методами).

По выборкам из обеих генеральных совокупностей вычислим соответствующие выборочные характеристики:

$$\bar{x} = \frac{1}{11}\sum_{i=1}^{11} x_i = \frac{1}{11}(2{,}5 + 2{,}2 + 2{,}6 + 2{,}0 + \ldots + 2{,}3 + 2{,}7 + 2{,}7 + 1{,}9) = 2{,}29;$$

$$\bar{y} = \frac{1}{11}\sum_{j=1}^{11} y_j = \frac{1}{11}(2{,}5 + 1{,}7 + 1{,}5 + 2{,}5 + \ldots + 2{,}0 + 2{,}6 + 2{,}3 + 2{,}2) = 2{,}08;$$

$$S_x^2 = \frac{1}{11-1}\sum_{i=1}^{11}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{10}[(2{,}5 - 2{,}29)^2 + \ldots + (1{,}9 - 2{,}29)^2] = 0{,}1009;$$

$$S_y^2 = \frac{1}{11-1}\sum_{j=1}^{11}(y_j - \bar{y})^2 = 0{,}1716\,.$$

Поскольку выборки малого объема $n = m = 11$, для проверки значимости различий средних применим критерий Стьюдента. Для использования критерия необходимо иметь равные дисперсии: $D(X) = D(Y)$. В нашем случае эти дисперсии неизвестны, но данное равенство можно проверить, воспользовавшись критерием Фишера о равенстве дисперсий. Нулевая гипотеза в критерии Фишера

$$H_0 : D(X) = D(Y).$$

В качестве конкурирующей гипотезы рассмотрим

$$H_1 : D(X) \neq D(Y),$$

откуда следует, что критическая область – двусторонняя. Уровень значимости полагаем стандартным $\alpha = 0{,}05$. По таблице (приложение 5) находим критическую точку, исходя из равенства:

$$k_{кр} = F_{кр}\left(\frac{\alpha}{2}; f_1, f_2\right) = F_{кр}(0{,}025;10;10) = 3{,}72.$$

Вычисляем $F_{набл}$. Поскольку среди S_x^2 и S_y^2 большей дисперсией является S_y^2, то

$$F_{набл} = \frac{S_y^2}{S_x^2} = \frac{0{,}1716}{0{,}1009} \approx 1{,}701.$$

Таким образом, получим, что $F_{набл} < F_{кр}$, следовательно, значение $F_{набл}$ принадлежит области принятия гипотезы, и нулевая гипотеза о равенстве дисперсий принимается, как не противоречащая опытным данным.

Установленный факт равенства дисперсий $D(X)$ и $D(Y)$ нормальных генеральных совокупностей позволяет сравнить средние $M(X)$ и $M(Y)$ с помощью критерия Стьюдента.

Для средних вновь выдвигаем нулевую гипотезу

$$H_0 : M(X) = M(Y)$$

и конкурирующую гипотезу

$$H_1 : M(X) \neq M(Y).$$

Критическая область – двусторонняя. Уровень значимости $\alpha = 0{,}05$.

Вычисляем наблюдаемое значение $t_{набл}$ критерия по формуле:

$$t_{набл.} = \frac{\overline{x} - \overline{y}}{\sqrt{(n-1)\cdot S_x^2 + (m-1)\cdot S_y^2}} \cdot \sqrt{\frac{n\cdot m(n+m-2)}{n+m}},$$

$$t_{набл.} = \frac{2{,}29 - 2{,}08}{\sqrt{(11-1)\cdot 0{,}1009 + (11-1)\cdot 0{,}1716}} \cdot \sqrt{\frac{11\cdot 11(11+11-2)}{11+11}} \approx 1{,}334.$$

По таблице (приложение 7) находим критическую точку, исходя из равенства:

$$t_{кр}(\alpha; f) = t_{кр}(0{,}05;11+11-2) = 2{,}09.$$

Сравнивая $t_{набл}$ и $t_{кр}$ делаем вывод, что $t_{набл}$ находится в области принятия гипотезы (т.к. $|t_{набл}| < t_{кр}$), следовательно, должна быть принята нулевая гипотеза $M(X)=M(Y)$, как не противоречащая опытным данным.

Вывод: В рассматриваемом примере критерий Стьюдента не выявил существенных различий в диаметрах коронарных артерий при сравнении двух групп обследуемых. Проведенный статистический анализ не позволяет считать значимым влияние нифедипина на диаметр коронарных артерий.

§ 8.7. Критерий знаков

Пусть $x_1, x_2, ..., x_n$ и $y_1, y_2, ..., y_n$ – две группы значений, попарно связанных между собой. **Критерий знаков** является критерием проверки гипотезы об однородности этих групп наблюдений, точнее, о принадлежности их к одной и той же генеральной совокупности. Математически нулевая гипотеза H_0 состоит в равенстве соответствующих функций распределения: $F_x = F_y$. Вид альтернативной гипотезы H_1 определяет критическую область:

- если $H_1 : F_x \neq F_y$, то критическая область двусторонняя;
- если $H_1 : F_x > F_y$, то критическая область левосторонняя;
- если $H_1 : F_x < F_y$, то критическая область правосторонняя.

Рассматриваемые выборки имеют попарно связанные элементы x_i, y_i, исходя из чего на практике критерий знаков используется для наблюдений до и после эксперимента. Исследуется наличие статистически значимого сдвига в значениях после эксперимента, которому и приписывается заслуга в этом изменении значений при справедливости гипотезы H_1 и отсутствии значимого влияния на формирование значений при принятии гипотезы H_0.

Отметим, что критерий знаков является непараметрическим, т.е. может быть применен вне зависимости от распределения признака.

В критерии знаков рассматриваются соответствующие разности значений $x_i - y_i$, но сама величина разности роли не играет, учитывается лишь знак выражения $x_i - y_i$. В случае равенства какой-то из разностей нулю, эта пара наблюдений выводится из исследования. Таким образом, исходным пунктом для применения критерия оказывается последовательность знаков «+» и «–». Можно сравнивать, например, результаты клинических исследований у 2 групп больных, или у одних и тех же больных до и после лечения. Следовательно, критерий знаков применим и к случаю качественных изменений в наблюдениях типа «лучше – хуже», «больше – меньше» и т.д., что является его несомненным достоинством.

При справедливости нулевой гипотезы

$$H_0 : F_x = F_y,$$

означающей, что совокупности однородны, а преобладание знака «+» или «–» в последовательности знаков является случайным, количества знаков «+» и «–» не должны существенно отличаться. Следовательно, для каждой пары наблюдений x_i, y_i появление того или иного знака происходит с вероятностью 0,5, а распределение случайной величины, принимающей значения от 0 до n, является биномиальным.

Пусть в серии из N опытов положительные значения Z наблюдались n_+ раз, а отрицательные – n_- раз. Тогда проверка справедливости нулевой гипотезы сводится к проверке значимости отличия n_+ или n_- от 0,5.

В математической статистике показывается, что для такой проверки следует ввести еще одну величину n_N, определяемую как наименьшее из чисел n_+ или n_-, и сравнить ее со значением критического числа $n_N^{кр}$.

Критические числа $n_N^{кр}$ определяются объемом выборки N и уровнем значимости α. В качестве критического числа $n_N^{кр}$ следует принимать целую часть числа

$$A = \frac{N-1}{2} - k\sqrt{N+1},$$

где $k = 0{,}8224$ для $\alpha = 0{,}10$ и $k = 0{,}9800$ для $\alpha = 0{,}05$.

Если $n_N > n_N^{кр}$, то нулевую гипотезу следует считать согласующейся с экспериментом. Если $n_N < n_N^{кр}$, то нулевую гипотезу отвергают.

Недостатком критерия знаков является то, что он учитывает только знак разностей сравниваемых наблюдений, не отражая величины этой разности. Поэтому критерий знаков имеет ограниченную мощность.

Пример 8.3. Проведено 100 опытов по изучению влияния некоторого физического фактора на величину артериального давления у двух групп животных, причем от опыта к опыту уровень фактора изменялся и регистрировались различия артериального давления у двух животных (по одному из каждой группы). При уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ оценить значимость различия в действии данного фактора на указанные группы животных, если в серии из 100 опытов положительная разность давлений наблюдалась 48 раз, а отрицательная – 44 раза.

Решение.

В данном случае $n_N = 44$. Находим критическое значение:

$$A = \frac{100-1}{2} - 0{,}98\sqrt{100+1} = 39{,}6$$

следовательно, $n_N^{кр} = 39$. Поскольку $n_N > n_N^{кр}$, то отвергать нулевую гипотезу нет оснований, и при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ различие в действии изучаемого фактора на рассматриваемые группы животных можно считать незначимым.

§ 8.8. Критерий Манна – Уитни (критерий однородности)

Для установления эффективности влияния некоторых факторов (лекарственного препарата, метода лечения, курения, занятия спортом и т. д.) на определенный контролируемый показатель ранее мы использовали критерий Стьюдента. В критерии Стьюдента мы рассматривали две выборки, извлеченных из нормальных генеральных совокупностей, и при условии равенства дисперсий (которое проверялось заранее) устанавливали, значимо или нет различие средних в этих генеральных совокупностях. Если это различие оказывалось незначимым, то, исходя из того, что нормальное распределение полностью определяется двумя параметрами (средним и дисперсией), мы делали вывод о совпадении этих генеральных совокупностей. Следовательно, можно считать, что обе выборки извлечены из одной и той же генеральной совокупности, т. е. однородны. Если же выборочные средние различаются значимо, то выборки извлечены из разных генеральных совокупностей, тот есть неоднородны.

Непараметрическим аналогом критерия Стьюдента является критерий Манна – Уитни.

Сущность этого критерия в следующем. Рассматриваются две группы наблюдений. Требуется установить однородность этих групп, т. е. можно ли считать эти выборки полученными из одной и той же генеральной совокупности или они получены из различных генеральных совокупностей.

Порядок расчёта критерия Манна – Уитни следующий:

1) Данные обеих выборок объединяем в одну и упорядочиваем по возрастанию. Каждому элементу группы предписываем его ранг. При этом элемент, обладающий наименьшим значением, получает ранг 1, следующий – ранг 2 и т.д. Последний ранг N, где $N = n + m$ – суммарный объем выборок, получает элемент, принимающий наибольшее значение.

Если несколько элементов имеют одинаковые значения, то всем им предписывается один и тот же ранг, равный среднему арифметическому номеров, под которыми стоят элементы в упорядоченной группе. Например, после упорядочения группа на 3-м и 4-м месте оказались элементы с равными значениями, тогда ранг каждого из них равен 3,5.

2) Присвоив элементам ранги, опять разводим их по своим группам. Вычисляем значение критерия T, где T – сумма рангов элементов меньшей из групп.

Замечание. С тем же успехом, если условиться, можно вычислять T как сумму рангов элементов большей из групп. Эта условность не принципиальна. В случае равного количества элементов в группах берем любую.

3) Вводим нулевую гипотезу об однородности двух выборок.

4) Полученное наблюдаемое значение критерия T сравниваем с двумя критическими значениями, взятыми из соответствующей таблицы (приложение 8, 9). Если наблюдаемое значение T находится между полученными критическими значениями, то принимаем нулевую гипотезу: выборки извлечены из одной генеральной совокупности.

Пример 8.4. Исследуется эффективность препарата, позволяющего сбросить лишнюю массу больным, страдающим ожирением. При этом группе добровольцев предписана определенная диета. Через месяц подобного режима, соблюдения диеты и регулярного приема препарата фиксируется величина потерянной массы в килограммах. Для проведения эксперимента отобрана группа из 8 добровольцев, причем 3 их них действительно получали исследуемый препарат (экспериментальная группа), а 5 довольствовались плацебо (контрольная группа). Отбор 3 добровольцев из 8 в экспериментальную группу осуществлялся случайным образом (репрезентативно).

Полученные данные проранжированы и занесены в таблицу

Экспериментальная группа		Контрольная группа	
потерянная масса	ранг	потерянная масса	ранг
6,2	8	4,0	7
3,0	3,5	-0,5	1
3,9	6	3,3	5
		1,5	2
		3,0	3,5
	$T=17{,}5$		

В таблице указана сумма рангов элементов меньшей из групп: $T=17{,}5$.

Нулевая гипотеза для двух рассматриваемых выборок – однородность групп, т. е. утверждение, что обе полученные выборки рангов извлечены из одной генеральной совокупности, а, следовательно, препарат неэффективен. Для проверки (или опровержения) этой гипотезы найдем критические точки.

Эти критические точки равны 6 и 21 при уровне значимости $\alpha = 0{,}036$ и равны 7 и 20 при уровне значимости $\alpha = 0{,}071$. В таблице приведены критические точки при двух значениях α, так как оба этих значения, 0,036 и 0,071, близки к стандартному уровню значимости $\alpha = 0{,}05$.

Наше наблюдаемое значение критерия $T = 17{,}5$, находится между критическими точками. Это означает, что отвергнуть нулевую гипотезу о неэффективности препарата нет оснований: исследуемый препарат неэффективен, а снижение массы объясняется другими причинами, возможно, диетой. Если обратиться к таблице данных, то заметно, что в экспериментальной группе наблюдается превышение значений потерянной массы над соответствующими значениями в контрольной группе. Однако то, что мы предполагаем интуитивно, статистический критерий не выявил по причине слишком малого объема выборки.

§ 8.9. Критерий Уилкоксона (наблюдения до и после эксперимента)

Критерий Уилкоксона является еще одним непараметрическим аналогом критерия Стьюдента. Поскольку критерий непараметрический, то для его применимости не требуется какой-либо определенный закон распределения генеральной совокупности. Критерий Уилкоксона – ранговый критерий, причем присваиваемые значениям признака ранги могут быть как положительными, так и отрицательными.

При применении критерия Уилкоксона для одних и тех же объектов наблюдения снимаются дважды: до эксперимента и после эксперимента. Под экспериментом понимается некоторое воздействие на объект, в результате которого наблюдаемые показатели могут измениться в ту или иную сторону: например, прием лекарственного препарата или определенная методика лечения приводят к некоторым изменениям контролируемых показателей. Задача критерия – по статистическим данным установить эффективность воздействия.

Группа наблюдений до эксперимента выступает в роли контрольной группы, а группа наблюдений после эксперимента – в роли экспериментальной группы.

В качестве наблюдаемого значения будем использовать разность наблюдаемых показателей до и после эксперимента для каждого индивидуума. Таким образом, из двух групп наблюдений получается одна выборка значений, среди которых могут быть как положительные (уменьшение показателя), так и отрицательные (увеличение показателя). При нулевой разности наблюдение не учитывается.

Далее производится ранжирование этой выборки, причем несколько иначе, чем в критерии Манна – Уитни, где используется простое упорядочивание. В нашем случае, прежде чем приступить к упорядочиванию выборочных значений, их вначале заменяют соответствующими абсолютными величинами, а затем полученные положительные числа ранжируют по возрастанию. Расставленные таким образом ранги изменения показателя являются промежуточными, далее каждому такому рангу предписывается знак «+» или «–» в зависимости от знака соответствующей ему разности. Часть рангов окажется положительными числами, а другая часть – отрицательными. Такие ранги называют **знаковыми**. Сумма знаковых рангов – случайная величина W, называемая критерием Уилкоксона.

В случае, когда исследуемое воздействие неэффективно, количество положительных и отрицательных разностей (а также и знаковых рангов) в среднем должно уравновешиваться, так как нет превалирующего изменения показателя в ту или иную сторону. Следовательно, среднее значение критерия Уилкоксона W должно быть равно нулю ($M(W)=0$ – нулевая гипотеза).

Для конкретной выборки разностей вычисляем $W_{набл}$, по приложению 10 находим соответствующие критические точки (с учетом заданного уровня значимости α) и определяем принадлежность $W_{набл}$ критической области или области принятия нулевой гипотезы.

Пример 8.4. Выявляется эффективность специальной диеты, позволяющей избавиться от избыточного массы. Фиксируется масса каждого участника до начала эксперимента и через месяц соблюдения диеты. Данные для группы из пяти добровольцев представлены в таблице.

№	Масса (кг) до эксперимента	Масса (кг) после эксперимента	Уменьшение показателя массы (кг), X	Модуль уменьшения показателя массы (кг)	Ранг	Знаковый ранг
1	93,2	88,9	4,3	4,3	5	5
2	98,2	94,5	3,7	3,7	4	4
3	105,6	106,1	-0,5	0,5	1	-1
4	86,8	84,3	2,5	2,5	2	2
5	95,5	92,5	3,0	3,0	3	3
						W=13

В первом столбце таблицы проставлен номер участника эксперимента, второй и третий столбцы представляют данные наблюдений массы в килограммах до и после эксперимента. Оставшиеся четыре столбца таблицы заполнены на основании этих данных. Уменьшение (изменение) показателя массы – это случайная величина, которую мы обозначаем X. Значения, представленные в соответствующем столбце – выборка из генеральной совокупности X.

В нашем случае распределение X неизвестно, и для получения выводов мы используем другую случайную величину W – сумму знаковых рангов, которые получаются на основании сравнения различных значений случайной величины X с учетом положительности и отрицательности (т. е. знаков) этих значений. В последнем столбце выписаны значения знаковых рангов, сумма которых и есть наблюдаемое значение случайной величины W, выступающей в роли критерия. В нашем примере наблюдаемое значение критерия $W_{набл} = 13$.

Напомним, что нулевая гипотеза $H_0: M(W) = 0$ – теоретическое предположение и, следовательно, отклонение наблюдаемого значения W от теоретического среднего составляет 13 единиц (т.к. $W_{набл} = 13$).

Необходимо ответить вопрос о значимости этого отклонения: можно ли считать, что это несоответствие вызвано случайными причинами или же существенное влияние оказывает диета питания.

По приложению 10 для $n = 5$ и уровне значимости $\alpha = 0{,}062$ критическое значение равно $W_{крит} = 15$.

Поскольку $|W_{набл}| < W_{крит}$, то при уровне значимости $\alpha = 0{,}062$ принимается нулевая гипотеза $H_0: M(W) = 0$.

§ 8.10. Критерии согласия χ^2

Критерием согласия называют критерий проверки гипотезы о предполагаемом законе распределения. Другими словами, критерии согласия призваны дать ответ на вопрос: отклонение эмпирических данных от соответствующих теоретических вызвано случайными обстоятельствами, например малым объемом выборки, или это расхождение существенно?

Имеется несколько критериев согласия: Пирсона, Колмогорова, Смирнова и др. Рассмотрим критерий согласия Пирсона, называемый также критерием хи-квадрат (χ^2).

Пусть по выборке объема получено эмпирическое распределение:

x_i	x_1	x_2	…	x_k
m_i	m_1	m_2	…	m_k

При уровне значимости α требуется проверить нулевую гипотезу: генеральная совокупность распределена нормально.

В качестве критерия проверки нулевой гипотезы примем случайную величину

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i},$$

где n – число элементов выборки (объем выборки); k – число групп (интервалов) разбиения выборки; m_i – число значений выборки, попавших в i-й интервал (эмпирическая частота); p_i – теоретическая вероятность попадания значения случайной величины X в i-й интервал, np_i – теоретическая частота попадания значений случайной величины X в i-й интервал.

Разность $m_i - np_i$ представляет собой отклонение эмпирической частоты m_i от теоретической np_i. Во избежание компенсации отклонений в положительную и отрицательную сторону данная разность возведена в квадрат. Делением на np_i достигают уменьшения каждого из слагаемых; в противном случае сумма была бы настолько велика, что приводила бы к отклонению нулевой гипотезы даже тогда, когда она справедлива.

Число степеней свободы находят по равенству $f = k - 1 - s$, где k – число групп (частичных интервалов) выборки; s – число параметров теоретического распределения (например, для нормального распределения $s = 2$, тогда число степеней свободы χ^2 равно $f = k - 3$; для пуассоновского распределения $s = 1$ и, следовательно, число степеней свободы равно $f = k - 2$).

Обозначим значение критерия, вычисленное по вышеприведенной формуле, через $\chi^2_{набл}$. По таблице критических точек распределения χ^2 (приложение 11), по заданному уровню значимости α и числу степеней свободы $f = k - 3$ найдем критическую точку $\chi^2_{кр}(\alpha; f)$.

Если $\chi^2_{набл} < \chi^2_{кр}$, то нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.

Если $\chi^2_{набл} > \chi^2_{кр}$, то нулевую гипотезу отвергают.

Замечание. Для контроля вычислений используют формулу

$$\chi^2_{набл} = \sum_{i=1}^{k} \frac{m_i^2}{np_i} - n.$$

Рассмотрим конкретный пример применения критерия согласия.

Пример 8.5. При уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверить гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности, если известны эмпирические m_i и теоретические частоты np_i.

m_i	6	13	38	74	106	85	30	14
np_i	3	14	42	82	99	76	37	13

Решение.

Вычислим $\chi^2_{набл}$, для чего составим расчетную таблицу

i	m_i	np_i	$m_i - np_i$	$(m_i - np_i)^2$	$\dfrac{(m_i - np_i)^2}{np_i}$	m_i^2	$\dfrac{m_i^2}{np_i}$
1	6	3	3	9	3	36	12
2	13	14	-1	1	0,07	169	12,07
3	38	42	-4	16	0,38	1444	34,38
4	74	82	-8	64	0,78	5476	66,78
5	106	99	7	49	0,49	11236	113,49
6	85	76	9	81	1,07	7225	95,07
7	30	37	-7	49	1,32	900	24,32
8	14	13	1	1	0,08	196	15,08
$\sum$	366	366			7,19		373,19

Таким образом $\chi^2_{набл} = 7{,}19$.

Контроль: $\sum\limits_{i=1}^{k} \dfrac{m_i^2}{np_i} - n = 373{,}19 - 366 = 7{,}19$.

Найдем число степеней свободы, учитывая, что число групп выборки (число различных вариант) $k = 8$, тогда $f = 8 - 3 = 5$.

Зная уровень значимости $\alpha = 0{,}05$ и число степеней свободы $f = 5$, по таблице критических точек распределения χ^2 находим $\chi^2_{кр}(0{,}05;5) = 11{,}1$.

Так как $\chi^2_{набл} < \chi^2_{кр}$, то нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Другими словами, расхождение эмпирических и теоретических частот незначимое. Следовательно, данные наблюдений согласуются с гипотезой о нормальном распределении генеральной совокупности.

§ 8.11. Множественные сравнения

Рассмотрим применение множественных сравнений на примере сравнения эффективности различных препаратов, результатом применения которых является численное значение определенного показателя (среднее артериальное давление, уровень глюкозы плазмы, время лечения и т. д.). Для эксперимента отобраны случайным образом несколько групп больных. И каждая группа получила не разные препараты, а плацебо. Результат применения такого «лекарства» нам заранее известен: все групповые средние различаются незначимо просто по определению плацебо; все выборки оказываются извлеченными из одной и той же генеральной совокупности, и для каждой выборки оцениваемое генеральное среднее едино.

На практике проведенный подобным образом эксперимент чисто математически может указать на значимое различие выборочных средних для какой-то пары наблюдаемых групп, на основании чего вполне реально получить неверный результат о различном влиянии плацебо в разных группах. И чем больше будет исследуемых групп, т. е. больше пар выборок, тем чаще будет встречаться подобная ситуация, противоречащая здравому смыслу. Появление такого факта называют **эффектом множественных сравнений**.

Рассмотрим подробнее, в чем же причина возникновения эффекта множественных сравнений. Вспомним определение уровня значимости α. Если у нас справедлива нулевая гипотеза о равенстве средних, то малое число α – вероятность отвергнуть эту верную гипотезу. При этом число α столь мало, что в единичном испытании нулевая гипотеза практически не отвергается. Сравнивая выборки попарно, мы проводим не одно, а большее количество испытаний и фактически увеличиваем вероятность отвержения верной гипотезы.

Уровень значимости α – вероятность отвергнуть верную нулевую гипотезу, тогда вероятность противоположного события – принять верную нулевую гипотезу – равна $1-\alpha$. Если проводится k попарных сравнений, то вероятность все k раз принять верную нулевую гипотезу оказывается равной $(1-\alpha)^k$. Следовательно, вероятность противоположного события – хотя бы раз ошибиться – это $\alpha_1 = 1-(1-\alpha)^k$.

Пусть α – стандартное значение уровня значимости, равное 0,05. Тогда для трех групп требуется три попарных сравнения $(k = C_3^2 = 3)$, и вероятность хотя бы одной ошибки равна $1-(1-0{,}05)^3 \approx 0{,}143$. Следовательно, по сравнению с $\alpha = 0{,}05$ вероятность ошибки выросла почти втрое. При сравнении четырех групп $(k = C_4^2 = 6)$, и тогда вероятность ошибки хотя бы при одном сравнении равна $1-(1-0{,}05)^3 \approx 0{,}143$. Это и есть объяснение появления эффекта множественных сравнений.

Оценим вероятность появления ошибки хотя бы в одном сравнении. Если в выражении $1-(1-\alpha)^k$ для вероятности ошибки произвести упрощение, то окажется при разных k:

$k=2$, $\alpha_1 = 1-(1-\alpha)^2 = 2\alpha - \alpha^2 < 2\alpha$;

$k=3$, $\alpha_1 = 1-(1-\alpha)^3 = 3\alpha - 3\alpha^2 + \alpha^3 = 3\alpha - \alpha^2(3-\alpha) < 3\alpha$;

$\alpha_1 < k\alpha$.

Последнее неравенство $\alpha_1 < k\alpha$ называют **неравенством Бонферрони**. Согласно этому соотношению, при числе парных сравнений k уровень значимости α следует выбирать таким, чтобы α_1, также оказывалось достаточно малым числом. Например, если мы хотим при трех сравнениях α_1, т. е. вероятность ошибиться хотя бы раз, иметь не более чем 0,05, то необходимо в каждом сравнении проверять нулевую гипотезу при $\alpha = \frac{0{,}05}{3} \approx 0{,}0165$.

Величина уровня значимости $\alpha = \frac{\alpha_1}{k}$, где α_1, выбирается заранее, называют **поправкой Бонферрони**. Обычно поправку Бонферрони используют при малых значениях k, т. е. при небольшом количестве групп, так как тогда значение α не является чересчур малым, что могло бы повлиять в реальной задаче на рост вероятности ошибки второго рода.

§ 8.12. Критерий Краскела – Уоллиса

Критерий Краскела – Уоллиса является многовыборочным обобщением критерия Манна – Уитни, задачей которого является проверка однородности k групп (выборок), т.е. принадлежности к одной и той же генеральной совокупности. Такая задача возникает при исследовании эффективности различных лекарственных препаратов, методов лечения и т.д.

В качестве нулевой гипотезы H_0 рассмотрим гипотезу о том, что все исходные выборки взяты из генеральных совокупностей с одинаковыми распределениями (гипотеза однородности). Для построения критерия проверки нулевой гипотезы используем ранги, как и в критерии Манна – Уитни. Пусть числа элементов по группам соответственно равны $n_1, n_2, ..., n_k$. Общее количество наблюдений по всем группам обозначим N:

$$N = n_1 + n_2 + ... + n_k.$$

Упорядочим все N элементов независимо от группы по возрастанию. Тогда каждый из элементов получает свой ранг – номер места в упорядоченном ряду. Если среди элементов ряда имеются совпадающие, то всем из них присваивается один и тот же ранг, равный среднему арифметическому их номеров, мест упорядоченного ряда. Заметим, что сумма всех N рангов, согласно формуле суммы арифметической прогрессии, равна

$$1+2+...+N=\frac{N(N+1)}{2}.$$

Далее вычислим средние ранги по группам, как средние арифметические соответствующих величин. Аналогично общий средний ранг равен

$$\overline{R}=\frac{1+2+...+N}{N}=\frac{N+1}{2}.$$

Если верна нулевая гипотеза, выборки однородны, то сами наблюдения, а, следовательно, и ранги должны быть по величине рассредоточены по группам более-менее равномерно, т. е. средние ранги $\overline{R}_1, \overline{R}_2, ..., \overline{R}_k$ не должны существенно различаться между собой. При их сравнении можно использовать отклонения от общего среднего:

$$\left(\overline{R}_1-\frac{N+1}{2}\right), ..., \left(\overline{R}_k-\frac{N+1}{2}\right).$$

Для суммарной характеристики таких отклонений с учетом численности групп введем случайную величину

$$H=\frac{12}{N(N+1)}\sum_{j=1}^{k} n_j\left(\overline{R}_j-\frac{N+1}{2}\right)^2,$$

называемую **статистикой Краскела – Уоллиса**.

Эта статистика H – критерий проверки нулевой гипотезы. Его структура такова, что распределение H с ростом численности групп стремится к распределению χ^2 с $k-1$ степенями свободы.

Подставляя наши данные в приведенную выше формулу критерия H, получаем $H_{набл}$. Критическую точку распределения χ^2 с $k-1$ степенями свободы находим при выбранном уровне значимости α по приложения 11. Если $H_{набл} < \chi^2_{кр}$, то на выбранном уровне значимости нулевая гипотеза об однородности выборок принимается (опытные данные этой гипотезе не противоречат). Если же $H_{набл} > \chi^2_{кр}$, то нулевая гипотеза об однородности групп наблюдений отвергается и группы следует сравнить попарно.

Замечание. Для вычисления наблюдаемого значения критерия Краскела – Уоллиса H вместо приведенной выше формулы можно использовать равносильную ей

$$H=\left(\frac{12}{N(N+1)}\sum_{j=1}^{k} n_j \overline{R}_j^2\right)-3(N+1).$$

Пример 8.6. Для определения влияния роста человека на его массу отобрано 20 студентов, которые разбиты на 4 группы в зависимости от их роста. Требуется установить (или опровергнуть) однородность полученных групп по массе. Данные занесены в таблицу, в которой также указаны ранги всех 20 наблюдений.

№	Рост 160 – 165 см		Рост 165 – 170 см		Рост 170 – 175 см		Рост 175 – 180 см	
	Масса (кг)	Ранг	Масса (кг)	Ранг	Масса (кг)	Ранг	Масса (кг)	Ранг
1	59	4,5	63	9	67	11	73	17
2	53	1	61	7	68	12,5	79	20
3	60	6	68	12,5	74	18	71	15
4	54	2	62	8	72	16	75	19
5	57	3	64	10	69	14		
6	59	4,5						
		$\overline{R}_1 = 3{,}5$		$\overline{R}_2 = 9{,}3$		$\overline{R}_3 = 14{,}3$		$\overline{R}_4 = 17{,}75$

Находим средние ранги (они занесены в нижнюю строку таблицы) и вычисляем $\overline{R} = \dfrac{N+1}{2} = \dfrac{20+1}{2} = 10{,}5$.

Вычисляем наблюдаемое значение H критерия

$$H = \frac{12}{20(20+1)}(6\cdot 3{,}5^2 + 5\cdot 9{,}3^2 + 5\cdot 14{,}3^2 + 4\cdot 17{,}75^2) - 3(20+1) = 16{,}676.$$

При уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ и числе степеней свободы $f = 4-1 = 3$ находим $\chi^2_{кр} = 11{,}34$.

Поскольку $H_{набл} > \chi^2_{кр}$, то нулевая гипотеза об однородности выборок должна быть отвергнута. Следовательно, масса человека зависит от роста.

§ 8.13. Критерий Фридмана

Критерий Фридмана является непараметрическим критерием, предназначенным для проверки однородности статистических данных. При использовании данного критерия каждый объект ровно один раз подвергается каждому методу обработки (или наблюдается в фиксированные моменты времени). Результаты наблюдения упорядочиваются. Причем отдельно упорядочиваются значения для каждого объекта независимо от всех остальных. Таким образом, получается столько упорядоченных рядов (блоков), сколько объектов участвует в исследовании.

Далее, для каждого метода обработки[2] (уровня главного фактора) вычисляется сумма рангов. Если разброс сумм велик – различия статистически значимы.

Для применения критерия Фридмана столбцы таблицы данных должны отражать различные значения главного фактора (обработки), а строки (блоки) соответствуют повторным измерениям одного и того же объекта.

Пусть главный фактор принимает k различных значений, а мешающий фактор – n различных значений. Тогда таблица данных будет иметь следующий вид:

Блоки	Обработки			
	1	2	…	k
1	x_{11}	x_{12}	…	x_{1k}
2	x_{21}	x_{22}	…	x_{2k}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
n	x_{n1}	x_{n2}	…	x_{nk}

С помощью критерия Фридмана проверяют нулевую гипотезу о том, что влияние главного фактора (обработки) не является значимым. Альтернативная гипотеза H_1 заключается в том, что гипотеза H_0 неверна.

Если гипотеза H_0 справедлива, то наблюдения внутри каждой строки таблицы данных распределены одинаково, при этом распределения наблюдений внутри любого столбца могут быть различными, если влияние мешающего фактора значимо.

Процедура состоит в упорядочивании (ранжировании) значений в каждой строке (ранги в каждой строке принимают значения от 1 до k – число сравниваемых обработок). Так, наблюдения первой строки получат ранги $r_{11},\dots,r_{1k}$, а наблюдения второй строки получат ранги $r_{12},\dots,r_{2k}$ и т.д., в результате чего наблюдение x_{ij} получит ранг r_{ij}. Значения r_{ij} изменяются от 1 до k, а соответствующая строка рангов представляет некоторую перестановку чисел 1, 2, ..., k (предполагается, что среди элементов, стоящих в одной строке таблицы данных нет совпадающих, в противном случае следует использовать средние ранги).

Критерий Фридмана имеет вид:

[2] В статистике принята терминология, по которой уровни главного фактора называют обработками, а уровни мешающего фактора – блоками.

$$F_{набл} = \frac{12}{nk(k+1)}\sum_{j=1}^{k}\left[\sum_{i=1}^{n} r_{ij} - \frac{n(k+1)}{2}\right]^2 = \frac{12}{nk(k+1)}\sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{i=1}^{n} r_{ij}\right)^2 - 3nk(k+1).$$

При справедливости гипотезы H_0 слагаемые в выражении для F с большой вероятностью невелики, и, следовательно, значение F сравнительно мало. Нарушение гипотезы H_0 приводит к возрастанию статистики Фридмана.

Критическое значение $F_{кр}$ при выбранном уровне значимости α и заданных n и k находятся по приложению 12. При больших значениях n статистика Фридмана приближенно распределена по закону χ^2 с $k-1$ степенями свободы.

Если $F_{набл} \geq F_{кр}$ для выбранного уровня значимости и заданных n и k (или соответствующего числа степеней свобод), то нулевую гипотезу отклоняют.

Если $F_{набл} < F_{кр}$, то на выбранном уровне значимости нулевая гипотеза об однородности выборок принимается.

Пример 8.7. Имеем данные по содержанию фосфора (мг/100г) в каждом из четырех органов у некоторых групп обследуемых:

	Группа1		Группа 2		Группа 3	
	мг/100г	ранг	мг/100г	ранг	мг/100г	ранг
Сердце	86,7	2	88,4	3	81,2	1
Легкие	102,7	2	108,1	3	99,8	1
Печень	204,6	2	213,2	3	201,2	1
Почки	184,6	3	183,4	2	179	1
Σ рангов	–	9	–	11	–	4

В этом примере $k = 3$, $n = 4$.

Вычисляем $F_{набл}$ значение критерия.

$$F_{набл} = \frac{12}{4 \cdot 3(3+1)}(9^2 + 11^2 + 4^2) - 3 \cdot 4(3+1) = 6{,}5.$$

Критическое значение $F_{кр}$ при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ и заданных $k = 3$ и $n = 4$ находим по приложению 12: $F_{кр} = 6{,}5$

Выполняется неравенство $F_{набл} \geq F_{кр}$, следовательно, при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ гипотезу H_0 следует отклонить. Таким образом, содержание фосфора у трех групп обследуемых различно.

§ 8.14. Проверка гипотезы о равенстве генеральных дисперсий нескольких нормальных генеральных совокупностей

Критерий Кочрена сравнения дисперсий нескольких нормальных генеральных совокупностей

Пусть X_i обозначает i-ю генеральную совокупность. Известно, что m генеральных совокупностей $X_1, X_2, ..., X_m$ имеют нормальное распределение ($m > 2$). При уровне значимости α требуется проверить гипотезу о равенстве дисперсий рассматриваемых генеральных совокупностей (также говорят об однородности дисперсий):

$$H_0 : D(X_1) = D(X_2) = ... = D(X_m).$$

Для проверки этой нулевой гипотезы взяты выборки одного и того же объема n каждая и вычислены исправленные выборочные дисперсии $S_1^2, S_2^2, ..., S_m^2$, которые, как известно, имеют число степеней свободы $f = n - 1$. Численные значения исправленных выборочных дисперсий соответственно обозначим $s_1^2, s_2^2, ..., s_m^2$.

В качестве критерия проверки выдвинутой гипотезы используем статистику

$$K = \frac{S_{\max}^2}{S_1^2 + S_2^2 + ... + S_m^2},$$

называемую **критерием Кочрена (Кохрана)**, где $S_{\max}^2$ – та из исправленных выборочных дисперсий, значение которой наибольшее.

Критическое значение распределения Кочрена $K_{кр}(\alpha, f, m)$ определяем по таблице (приложение 13).

Если $K_{набл} < K_{кр}$, то нулевая гипотеза принимается, в противном случае $K_{набл} > K_{кр}$ делаем вывод, что дисперсии в рассматриваемых генеральных совокупностях различны. Уточнить, в каких именно генеральных совокупностях различаются дисперсии, можно с помощью того же или другого критерия, сравнивая меньшее количество выборок, например сравнивая выборки попарно.

В случае справедливости гипотезы H_0 в качестве оценки генеральной дисперсии используют среднее арифметическое значение имеющихся m исправленных выборочных дисперсий.

Пример 8.8. Три лаборатории провели анализ 9 проб исследуемого препарата для определения в нем процентного содержания эфирного масла. Исправленные выборочные дисперсии оказались: в первой лаборатории $s_1^2 = 0{,}037$, во второй лаборатории $s_2^2 = 0{,}063$, в третьей лаборатории $s_3^2 = 0{,}052$. Предполагая, что случайная величина – процентное содержание эфирного масла в препарате имеет нормальное распределение, требуется при уровне значимости $\alpha = 0{,}01$ проверить гипотезу об однородности дисперсий.

Решение.

Процентное содержание эфирного масла в препарате – это случайная величина (генеральная совокупность). Для каждой из лабораторий рассматриваемая генеральная совокупность своя. Таким образом, имеются три генеральные совокупности X_1, X_2, X_3, из которых извлечены по одной выборке одинакового объема $n = 9$. По вычисленным значениям s_1^2, s_2^2, s_3^2 проверим нулевую гипотезу однородности дисперсий:

$$H_0 : D(X_1) = D(X_2) = D(X_3).$$

Так как все три генеральные совокупности по условию нормальны, а выборки одинакового объема $n = 9$, то можно применить критерий Кочрена.

Вычислим наблюдаемое значение критерия

$$K = \frac{S_{\max}^2}{S_1^2 + S_2^2 + \ldots + S_m^2} = \frac{0{,}063}{0{,}037 + 0{,}063 + 0{,}052} \approx 0{,}4257.$$

Критическую точку найдем из приложения 13 при $\alpha = 0{,}01$:

$$K_{кр}(\alpha, f, m) = K_{кр}(0{,}01;8;3) = 0{,}7107$$

(напомним, что $f = n - 1$, где n – объем каждой из выборок; m – количество выборок).

Так как $K_{набл} < K_{кр}$ $(0{,}4257 < 0{,}7107)$, то на уровне значимости $\alpha = 0{,}01$ различие выборочных дисперсий незначимо, и гипотеза об однородности дисперсий принимается. Оценка дисперсии – одна и та же для любой из трех рассматриваемых генеральных совокупностей – это среднее арифметическое

$$s^2 = \frac{s_1^2 + s_2^2 + s_2^3}{3} = \frac{0{,}037 + 0{,}063 + 0{,}052}{3} \approx 0{,}0493.$$

Критерий Бартлетта сравнения дисперсий нескольких генеральных совокупностей

Пусть имеется m нормальных генеральных совокупностей. Обозначим их $X_1, X_2, \ldots, X_m$. При уровне значимости α требуется проверить нулевую гипотезу о равенстве соответствующих генеральных дисперсий:

$$H_0 : D(X_1) = D(X_2) = \ldots = D(X_m),$$

называемую также **гипотезой об однородности дисперсий**.

Из каждой генеральной совокупности X_i извлечена выборка объема n_i. Если все n_i равны, то для проверки H_0 можно использовать критерий Кочрена. В противном случае, когда выборки, вообще говоря, разного объема, нам необходим другой критерий проверки нулевой гипотезы. Рассмотрим критерий Бартлетта.

Пусть по выборкам найдены исправленные выборочные дисперсии $S_1^2, S_2^2, ..., S_m^2$, при этом каждая статистика S_i^2 имеет число степеней свободы $k_i = n_i - 1$. Обозначим суммарное число степеней свободы по всем выборкам

$$k = k_1 + k_2 + ... + k_m$$

и среднее арифметическое исправленных выборочных дисперсий, взвешенное по числу степеней свободы,

$$\overline{S}^2 = \frac{1}{k}(k_1 S_1^2 + k_2 S_2^2 + ... + k_m S_m^2).$$

Введем еще две величины:

$$V = k \ln \overline{S}^2 - \sum_{i=1}^{m} k_i \ln S_i^2);$$

$$C = 1 + \frac{1}{3(m-1)}\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{k_i} - \frac{1}{k}\right)$$

Заметим, что V – статистика, т.е. случайная величина, а C – постоянная, причем $C > 1$.

Отношение

$$B = \frac{V}{C}$$

является **критерием Бартлетта** проверки гипотезы H_0. При справедливости нулевой гипотезы критерий B имеет приближенное распределение χ^2 с $(m-1)$ степенями свободы.

Критическую точку $B_{кр}(\alpha, f = m-1)$ при выбранном уровне значимости α найдем из приложения 11.

Если $B_{набл} < B_{кр}$, то нулевая гипотеза о равенстве дисперсий принимается; если же $B_{набл} > B_{кр}$, то различие выборочных дисперсий признается значимым, и гипотеза H_0 отвергается.

В случае принятия нулевой гипотезы оценка генеральной дисперсии – это значение $\overline{s}^2$, вычисленное по конкретным значениям выборочных дисперсий.

Замечание. Критерий Бартлетта достаточно резко реагирует на отклонения от нормального закона распределения, поэтому, если имеются сомнения в типе распределения, лучше использовать выборки одинакового объема и обратиться к критерию Кочрена.

Пример 8.9. Три лаборатории проводили анализ исследуемого препарата на процентное содержание в нем эфирного масла. Первая лаборатория исследовала 10 проб, вторая – 12 и третья – 17 проб. Исправленные выборочные дисперсии оказались соответственно $s_1^2 = 0{,}045$, $s_2^2 = 0{,}033$, $s_3^2 = 0{,}040$.

Предполагая, что процентное содержание эфирного масла в данном препарате имеет нормальное распределение, требуется при уровне значимости $\alpha = 0{,}01$ проверить гипотезу об однородности дисперсий.

Решение.

Процентное содержание эфирного масла в препарате – случайная величина, т.е. генеральная совокупность, своя персональная для каждой лаборатории. Поскольку объемы выборок для каждой генеральной совокупности различны, для проверки гипотезы H_0, равенства генеральных дисперсий воспользуемся критерием Бартлетта.

Так как используется много данных, оформим их в виде таблицы:

Номер генеральной совокупности i	Объем выборки n_i	Число степеней свободы k_i	s_i^2	$k_i s_i^2$	$\ln(s_i^2)$	$k_i \ln(s_i^2)$
1	10	9	0,045	0,405	-3,101	-27,910
2	12	11	0,033	0,363	-3,411	-37,523
3	17	16	0,040	0,640	-3,219	-51,502
		$k = 36$	$\overline{s}^2 = 0{,}039$		$\ln(\overline{s}^2) = -3{,}24$	$\sum = -116{,}94$

Исходя из найденных значений вычисляем наблюдённое значение V: $V = 0{,}245$, тогда $B_{набл} = \dfrac{0{,}245}{C}$.

Из приложения 11 находим $B_{кр}(\alpha, f = m-1) = B_{кр}(0{,}01;2) = 9{,}2$.

Заметим, что постоянная C всегда больше 1, следовательно,

$$B_{набл} = \frac{0{,}245}{C} < 0{,}245 < 9{,}2.$$

Следовательно, вычислять значение постоянной C нет необходимости.

Значение $B_{набл}$ попадает в область принятия гипотезы, тем самым статистически доказано равенство дисперсий всех трех генеральных совокупностей. Оценка их обшей дисперсии равна $\overline{s}^2 = 0{,}039$.

Вопросы для самоконтроля

1. Что такое статистическая гипотеза?
2. Какая гипотеза называется простой?
3. Дайте определение нулевой, альтернативной гипотезам.
4. В чем заключается задача проверки гипотез?
5. Какие могут возникнуть ошибки при проверки гипотез? Дайте определение ошибкам первого рода и ошибкам второго рода.
6. Что такое уровень значимости? Как он связан с доверительной вероятностью?
7. Что такое статистический критерий? Почему во многих исследованиях используют двусторонний критерий?
8. Что такое критическая область?
9. В чем заключается основной принцип проверки статистических гипотез?
10. Дайте определение односторонней критической области (двусторонней критической области).
11. Когда используются параметрические, непараметрические критерии?
12. Какова процедура проверки гипотез?
13. Приведите примеры независимых, зависимых выборок.
14. В чем заключается проверка гипотез относительно средних?
15. Дайте понятие критерия Стьюдента (запишите формулу).
16. Дайте определение критерия Фишера (запишите формулы, когда применяется данный критерий).
17. В каком случае применяется критерий Манна–Уитни?
18. Дайте понятие критерия Уилкоксона.
19. В чем заключается критерий Краскела–Уоллиса?
20. При каких условиях применяется критерий Фридмана?
21. Дайте понятие критерия знаков.
22. Когда для проверки соответствующих гипотез можно использовать критерий Кочрена? Запишите формулы.
23. В каком случае для проверки гипотез можно использовать критерий Бартлетта? Запишите соответствующие формулы.

Задания для решения

1. По двум независимым малым выборкам объемов $n_1 = 5$ и $n_2 = 6$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X_1 и X_2, найдены выборочные средние $\overline{x_1} = 33$, $\overline{x_2} = 2{,}48$. Известно, что генеральные

дисперсии примерно равны, то есть $\sigma_{x_1}{}^2 = \sigma_{x_2}{}^2$. При уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверить нулевую гипотезу $H_0 : M(X_1) = M(X_2)$

2. По двум независимым выборкам объемов $n_1 = 12$ и $n_2 = 15$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X_1 и X_2, найдены исправленные выборочные дисперсии $S_{x_1}{}^2 = 11{,}41$ и $S_{x_2}{}^2 = 6{,}52$. При уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверить нулевую гипотезу о равенстве генеральных дисперсий $H_0 : \sigma_{x_1}{}^2 = \sigma_{x_2}{}^2$.

3. По двум независимым малым выборкам объемов $n_1 = 5$ и $n_2 = 6$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X_1 и X_2, найдены выборочные средние $\overline{x_1} = 8{,}3$, $\overline{x_2} = 7{,}48$ и выборочные дисперсии $S_{x_1}{}^2 = 0{,}25$ и $S_{x_2}{}^2 = 0{,}108$. При уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверить нулевую гипотезу $H_0 : M(X_1) = M(X_2)$.

4. Средняя продолжительность госпитализации 36 больных пиелонефритом, получивших правильное, соответствующее официальным рекомендациям лечение, составила 4,51 суток, а 36 больных, получивших неправильное лечение, – 6,28 суток. Средние квадратические отклонения для этих групп – 1,98 суток и 2,54 суток соответственно. Значимо ли статистически различие в сроках госпитализации? Другими словами, способствует ли соблюдение официальных схем лечения сокращению госпитализации?

5. Были исследованы две независимые выборки объемом 60 больных каждая, перенесших операцию на сердце. Использовались два способа анестезии. У больных первой выборки (первый способ анестезии) минимальное среднее динамическое давление составило $\overline{x_1} = 66{,}9$ мм рт. ст., а среднее квадратическое отклонение равно $S_1 = 12{,}2$ мм рт. ст. У больных второй группы (в качестве наркоза использовался препарат №2) $\overline{x_2} = 73{,}2$ мм рт. ст., а $S_2 = 14{,}4$ мм рт. ст. Действительно ли препарат №1 в большей степени снижает артериальное давление? Оценить статистическую значимость различия средних и дисперсий.

6. Для проверки эффективности нового лекарственного препарата *A* отобраны две группы больных. Одна группа ($n_1 = 50$ человек) контрольная, которая получала плацебо, а вторая группа ($n_2 = 70$ человек) получала препарат *A*. Среднее значение некоторого гемодинамического показателя составило $\overline{x_1} = 78{,}5$ в первой группе и $\overline{x_2} = 85$ – во второй. Дисперсии в группах равны соответственно $\sigma_{x_1}{}^2 = 100$ и $\sigma_{x_2}{}^2 = 74$. При

уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ выяснить, действительно ли препарат эффективен?

7. При исследовании влияния курения на развитие ишемической болезни сердца изучалась агрегация тромбоцитов. 111 добровольцев выкуривали по сигарете. До и после курения у них были взяты пробы крови и определена агрегация тромбоцитов. Используя критерий знаков, получили следующие результаты: 86 разностей – положительные, 4 – нулевые, 20 – отрицательные. Критическое значение критерия 44,5 при α=0,05. Можно ли сказать, что изменение агрегации тромбоцитов статистически значимо или нет?

8. При анализе препарата дифференциальным методом по двум независимым выборкам объемов $n_1 = 11$ и $n_2 = 14$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X_1 и X_2, получены исправленные выборочные дисперсии $S_{x_1}{}^2 = 0{,}76$ и $S_{x_2}{}^2 = 0{,}38$. При уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверить нулевую гипотезу о равенстве генеральных дисперсий.

9. По двум независимым выборкам, объемы которых $n_1 = 14$ и $n_2 = 10$, извлеченных из нормальных генеральных совокупностей X_1 и X_2, найдены исправленные выборочные дисперсии летальных доз двух препаратов $S_{x_1}{}^2 = 0{,}84$ и $S_{x_2}{}^2 = 2{,}52$. При уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверить нулевую гипотезу о равенстве генеральных дисперсий $H_0 : \sigma_{x_1}{}^2 = \sigma_{x_2}{}^2$, при конкурирующей гипотезе: $H_1 : \sigma_{x_1}{}^2 \neq \sigma_{x_2}{}^2$.

10. При анализе вещества двумя способами по двум независимым выборкам объемов $n_1 = 10$ и $n_2 = 8$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X_1 и X_2, найдены выборочные средние $\overline{x_1} = 142{,}3$ и $\overline{x_2} = 145{,}3$ и исправленные дисперсии $S_{x_1}{}^2 = 2{,}7$ и $S_{x_2}{}^2 = 3{,}2$. При уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверить:

1) равенство дисперсий по критерию Фишера;

2) проверить нулевую гипотезу: $H_0 : M(X_1) = M(X_2)$.

11. Установлено, что средняя масса таблетки сильнодействующего лекарства должна быть равна 0,50 мг. Выборочная проверка 121 таблетки полученной партии лекарства показала, что средняя масса таблетки этой партии $\overline{x} = 0{,}53$ мг. Требуется при уровне значимости $\alpha = 0{,}01$ проверить нулевую гипотезу $H_0 : M(X) = 0{,}50$ при конкурирующей гипотезе $H_1 : M(X) > 0{,}50$, где масса таблетки – генеральная совокупность X. Многократными предварительными опытами по взвешиванию таблеток, поставляемых фармацевтической фирмой, было установлено, что

масса таблеток распределен нормально со средним квадратическим отклонением $\sigma = 0{,}11$ мг.

12. При исследовании продолжительности отрицательного времени при пробе на остроту зрения в двух группах учеников – мальчиков и девочек в возрасте 12 лет – были получены следующие результаты: у мальчиков $\overline{x} = 70$ с, $S_x = 5$ с при $n = 20$ наблюдениях; у девочек $\overline{y} = 75$ с, $S_y = 6$ с при $m = 30$ наблюдениях. Требуется определить, существенна ли разность средних в двух выборках. Уровень значимости принять равным $\alpha = 0{,}05$.

13. Исследуется эффективность прививки против сыпного тифа. Под наблюдением находится 17 685 человек. Наблюдаемые результаты занесены в таблицу.

	Количество заболевших	Количество незаболевших	Всего
С прививкой	72	7988	8060
Без прививки	303	9322	9625
Итого	375	17 310	17 685

Используя критерий χ^2, сделайте выводы об эффективности прививок.

14. Сравниваются методы лечения некоторого заболевания, применяемые в государствах *A* и *B*. Показателем эффективности лечения является разница в смертности больных, находящихся на излечении. Данные смертности этих больных в течение определенного срока после установления диагноза приведены в таблице. По имеющимся данным требуется установить наличие (или отсутствие) существенной разницы в смертности больных в государствах *A* и *B*. Уровень значимости стандартный $\alpha = 0{,}05$.

Указание. Заполните пустые графы таблицы. Для вычислений используйте критерий χ^2.

Возрастная подгруппа	Государство *A*			Государство *B*			χ_i^2
	Кол-во заболевших n_i	Кол-во умерших m_i	Смертность, %	Кол-во заболевших n_i	Кол-во умерших m_i	Смертность, %	
20–30	732	65		790	92		
30–40	1005	110		1211	262		
40–50	990	123		1370	193		
50–60	665	87		805	121		
> 60	324	49		305	45		
Всего			–			–	

15. Во время эпидемии под наблюдением оказалось 47 больных. Из них к 30 был применен новый лекарственный препарат, а 17 лечились прежними средствами. Итог: из 30 лечившихся с помощью нового препарата умерли 4, выздоровели 26; из 17 лечившихся прежними средствами умерли 9, выздоровели 8 человек. Используя критерий χ^2, сделайте выводы об эффективности нового препарата.

16. Проведен случайный отбор 10 семей, состоящих каждая из 5 человек и имеющих одинаковый месячный доход. Обследовано, какую долю доходов каждая семья тратит на культурные нужды и на транспорт. Используя критерий однородности Манна – Уитни, при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ необходимо проверить гипотезу H_0, что средние доли расходов на эти цели в генеральной совокупности семей, из которой взята выборка, в среднем одинаковы.

№	Доля расходов на культурные нужды, %	Доля расходов на транспорт, %
1	9,1	5,3
2	6,2	5,7
3	6,0	4,2
4	8,4	4,6
5	4,2	9,8
6	6,8	5,1
7	6,9	5,2
8	8,6	8,7
9	3,5	6,3
10	7,2	3,2

ГЛАВА IX
ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ КОРРЕЛЯЦИИ

§ 9.1. Функциональная, статистическая и корреляционная зависимости. Уравнение линейной регрессии

Выявление статистических связей между случайными величинами широко используется в медицинской практике. Этим методом решаются задачи установления обоснованного диагноза, оценки эффективности лечения. Установление зависимости между различными показателями состояния больного и влияние их изменений на жизнедеятельность организма является важной задачей лабораторных и клинических исследований. Более того, все системы, органы, ткани, клетки целостного организма находятся в связи друг с другом; эту связь можно измерить, например, с помощью коэффициента корреляции. Благодаря различным формам корреляции организм проявляется как единая сложная целостная система.

Как известно, случайные величины X и Y могут быть либо независимыми, либо зависимыми. Зависимость случайных величин также подразделяется на функциональную и статистическую. **Функциональная** зависимость между двумя переменными существует в том случае, когда каждому допустимому значению одной из них соответствует одно вполне определенное значение другой. Функциональные зависимости иногда можно выразить аналитически. Так, например, объем шара зависит от его радиуса $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, площадь квадрата от его стороны $S = a^2$. В общем случае функциональная зависимость выражаются формулой $y = f(x)$. Функциональная связь свойственна неслучайным (детерминированным) переменным.

В медико-биологических исследованиях чаще встречаются **статистические** зависимости между величинами. При этом каждому значению одной величины соответствует не единственное значение другой величины, а некоторое множество значений с определенным законом распределения. Например, между возрастом и ростом детей связь выражается в том, что каждому значению возраста соответствует определенное распределение роста (а не одно единственное значение). При этом с увеличением возраста (до определенных пределов) возрастает и среднее значение роста.

Частным случаем статистической зависимости между X и Y является **корреляционная зависимость,** когда каждому значению X ставится в соответствие математическое ожидание (среднее арифметическое значение) распределения другой величины Y.

Корреляционной является зависимость массы тела от роста: каждому значению роста (X) соответствует множество значений массы (Y), причем, несмотря на общую тенденцию, справедливую для средних: большему значению роста соответствует и большее значение массы тела, в отдельных наблюдениях субъект с большим ростом может иметь и меньшую массу. Корреляционной будет зависимость заболеваемости от воздействия внешних факторов, например запыленности, уровня радиации, солнечной активности и т.д. Имеется корреляция между дозой ионизирующего излучения и числом мутаций, между пигментом волос человека и цветом глаз, между показателями уровня жизни населения и процентом смертности, между количеством пропущенных студентами лекций и оценкой на экзамене. Именно корреляционные зависимости наиболее часто встречаются в природе в силу взаимовлияния и тесного переплетения огромного множества самых различных факторов, определяющих значения изучаемых показателей.

При установлении корреляционной зависимости экспериментально для каждого обследуемого объекта получают соответствующие пары значений величин X и Y (например, роста и массы тела людей определенного пола и возраста):

Таблица 9.1

Значения величины X	x_1	x_2	x_3	…	x_n
Значения величины Y	y_1	y_2	y_3	…	y_n

Пусть имеется выборка объемом n. Каждой паре значений (x_i, y_i) на плоскости соответствует одна точка. Всего будет n точек. Область на графике $y(x)$, занятая этими точками, образует **поле корреляции** или **корреляционное поле точек**.

По характеру расположения точек на нем можно сделать вывод о наличии или отсутствии корреляционной зависимости между величинами Y и X. (табл. 9.2)

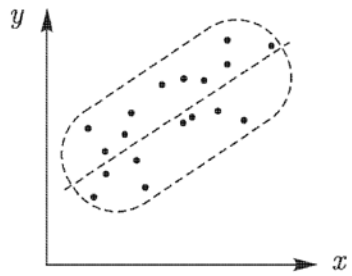
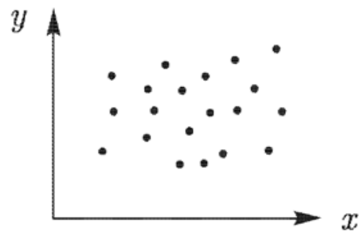
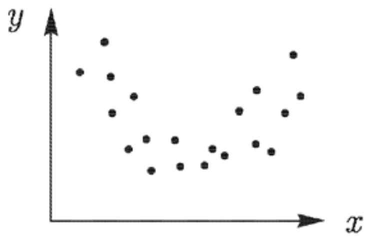
Корреляционную зависимость можно описать с помощью уравнения вида

$$M(Y_x) = f(x),$$

где $M(Y_x)$ – условное математическое ожидание величины Y, соответствующее данному значению x; x – отдельные значения величины X; $f(x)$ – некоторая функция.

Уравнение $M(Y_x) = f(x)$ называют **уравнением регрессии *Y* на *X***, а его график называют **линией регрессии**.

Таблица 9.2

Корреляция	Вид зависимости
а) Наличие линейной корреляционной зависимости	
б) Неочевидная корреляционная зависимость	
в) Наличие нелинейной корреляционной зависимости	

Обратную корреляционную зависимость (если она существует) можно описать уравнением регрессии *X* на *Y*:

$$M(X_y) = \varphi(y),$$

где $M(X_y)$ – условное среднее значение величины *X*, соответствующее данному значению *y*; $\varphi(y)$ – некоторая функция.

Если функции $f(x)$ и $\varphi(y)$ – линейные функции, что можно оценить по характеру расположения точек корреляционного поля, то эти функции можно представить в виде:

$$M(Y_x) = ax + b = (\textit{наклон}) \cdot (x) + (\textit{сдвиг}),$$

$$M(X_y) = cy + d = (\textit{наклон}) \cdot (y) + (\textit{сдвиг}).$$

Данные формулы называются **уравнениями прямой линейной регрессии**.

Для нахождения коэффициентов a (наклон) и b (сдвиг), входящих в уравнение прямой, используем метод **наименьших квадратов.**

§ 9.2. Оценка параметров линейной регрессии по несгруппированным данным. Метод наименьших квадратов

При проведении современных клинических исследований обычно нет недостатка в информации: каждому пациенту соответствует целое множество различных клинических показателей и данных. В них могут быть завуалированы некоторые соотношения, основные черты которых и позволяют выявлять методы регрессионного анализа. При этом задача регрессионного анализа состоит в подборе упрощенной аппроксимации этой связи с помощью математической модели.

Регрессионный анализ имеет в своем распоряжении специальные процедуры проверки, является ли выбранная математическая модель адекватной для описания имеющихся данных.

Чаще всего регрессионный анализ используется для прогноза, то есть предсказания значений ряда зависимых переменных по известным значениям других переменных.

Выше указывалось, что результаты наблюдений, приведенные в двумерной выборке, можно представить в виде корреляционного поля точек, где каждая точка соответствует отдельным значениям X и Y. В результате получается диаграмма рассеяния, позволяющая судить о форме и тесноте связи между варьирующимися признаками. Довольно часто эта связь может быть аппроксимирована прямой линией (рис. 9.1)

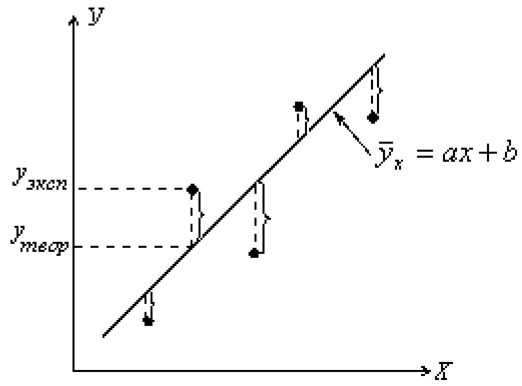


Рис. 9.1

В 1806 году французский математик Лежандр доказал, что наилучшим образом связь между X и Y будет отражать прямая линия $\bar{y}_x = ax + b$, для которой сумма

$$S = \sum_{i=1}^{n} (y_{i\,\text{эксп}} - y_{i\,\text{теор}})^2,$$

будет минимальной.

В данном выражении $y_{i\,\text{эксп}}$ – значение Y, полученное из опыта, $y_{i\,\text{теор}}$ – расчётное y, лежащее на прямой, S – отклонение. Так как $y_{i\,\text{теор}} = ax + b$, то сумму можно записать:

$$S(a,b) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)^2$$

Это выражение означает, что значения коэффициентов a и b должны быть подобраны так, чтобы сумма квадратов отклонений ординат экспериментальных точек от ординат точек сглаживающей прямой стала **минимальной**.

В соответствии с правилами исследования функции нескольких переменных на минимум должны выполняться следующие условия для частных производных этой функции первого и второго порядков:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a} = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial b} = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 S}{\partial a^2} > 0 \\ \dfrac{\partial^2 S}{\partial b^2} > 0 \end{cases}$$

Преобразуем полученные выражения:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a} = 2\sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)(-x_i) = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial b} = 2\sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)(-1) = 0 \end{cases} ; \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 S}{\partial a^2} = 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 > 0 \\ \dfrac{\partial^2 S}{\partial b^2} = 2\sum_{i=1}^{n} 1 = 2n > 0 \end{cases}$$

Поскольку последняя система неравенств удовлетворяется при любых a и b, то решим первую систему уравнений. Делим оба уравнения на 2 и умножаем на (-1):

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + bn = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases}$$

Данная система называется **системой нормальных уравнений Гаусса**. Решая эту систему, найдём a и b, и получим искомое уравнение линейной регрессии $\bar{y}_x = ax + b$:

$$a = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}, \qquad b = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}.$$

Пример 9.1. Исследуется зависимость площади пораженной части легких у людей, заболевших эмфиземой легких, от числа лет курения. Получены следующие данные:

Число лет курения, X_i	25	36	22	25	48	39	42	31	28	33
Площадь пораженной части (%), Y_i	55	60	50	45	75	70	70	55	60	55

Методом наименьших квадратов найти коэффициенты a и b сглаживающей прямой $\bar{y}_x = ax + b$. Построить график.

Решение.

Коэффициенты a и b сглаживающей прямой $\bar{y}_x = ax + b$ определяются по формулам:

$$a = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}, \qquad b = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}.$$

Для этого предварительно найдем $\sum_{i=1}^{n} x_i$, $\sum_{i=1}^{n} y_i$, $\sum_{i=1}^{n} x_i^2$, $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$:

	x_i	y_i	x_i^2	$x_i \cdot y_i$
	25	55	625	1375
	36	60	1296	2160
	22	50	484	1100
	25	45	625	1125
	48	75	2304	3600
	39	70	1521	2730
	42	70	1764	2940
	31	55	961	1705
	28	60	784	1680
	33	55	1089	1815
$\sum$	329	595	11453	20230

$$a = \frac{10 \cdot 20230 - 329 \cdot 595}{10 \cdot 11453 - 329^2} \approx 1{,}0407, \quad b = \frac{11453 \cdot 595 - 329 \cdot 20230}{10 \cdot 11453 - 329^2} \approx 25{,}261$$

Искомое уравнение сглаживающей прямой $\bar{y}_x = ax + b$:

$$\bar{y}_x = 1{,}0407x + 25{,}261.$$

График искомой сглаживающей прямой приведён на рис. 9.2.

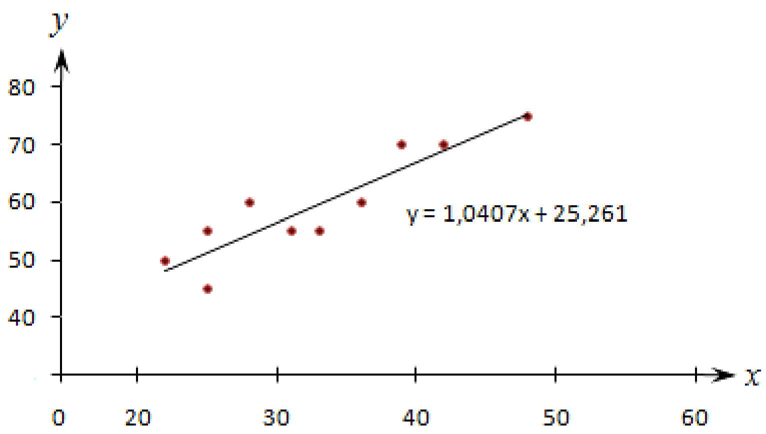


Рис. 9.2

§ 9.3. Оценка параметров линейной корреляции по сгруппированным данным. Корреляционная таблица

На практике имеют дело с ограниченным объемом (выборкой) пар значений изучаемых величин X и Y, получаемых в результате независимых наблюдений: (x_1, y_1), (x_2, y_2), …, (x_i, y_i),…

Первым этапом статистической обработки результатов с целью определения наличия и вида корреляционной зависимости между изучаемыми величинами является составление **корреляционной таблицы** (табл. 9.3)

Таблица 9.3

$Y \setminus X$	x_1	x_2	…	x_i	…	x_k	n_y
y_1	n_{11}	n_{21}	…	n_{i1}	…	n_{k1}	n_{y1}
y_2	n_{12}	n_{22}	…	n_{i2}	…	n_{k2}	n_{y2}
…	…	…	…	…	…	…	…
y_j	n_{1j}	n_{2j}	…	n_{ij}	…	n_{kj}	n_{yj}
…	…	…	…	…	…	…	…
y_l	n_{1l}	n_{2l}	…	n_{il}	…	n_{kl}	n_{yl}
n_x	n_{x1}	n_{x2}	…	n_{xi}	…	n_{xk}	N

Поясним, как заполняется корреляционная таблица.

В первой строке перечисляются все встречающиеся в выборке значения величины *X*: $x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_k$, где k – количество различных значений, $i = 1, 2, ..., k$.

В первом столбце перечисляются все встречающиеся в выборке значения величины *Y*: $y_1, y_2, ..., y_j, ..., y_l$, где l – количество различных значений, $j = 1, 2, ..., l$.

Если количество различных значений величин *X* и *Y* велико или эти величины распределены непрерывно, то производится группировка значений по интервалам. В этом случае x_i и y_j представляют собой середины соответствующих интервалов.

На пересечении строк и столбцов указываются частоты n_{ij}, равные числу появлений в выборке пары (x_i, y_j).

В последней строке указываются числа n_{xi}, равные количеству появлений в выборке значения x_i независимо от того, в паре с каким из значении величины *Y* оно появилось. Значение n_{xi} равно сумме частот соответствующих столбцов, т. е.

$$n_{xi} = n_{i1} + n_{i2} + ... + n_{ij} + ... + n_{il} = \sum_{j=1}^{l} n_{ij}.$$

В последнем столбце находятся числа n_{yj} равные количеству появлений в выборке значения y_j независимо от того, в паре с каким из значений величины *X* оно появлялось. Значения n_{yj} равны суммам частот соответствующих строк, т. е.

$$n_{yj} = n_{1j} + n_{2j} + ... + n_{ij} + ... + n_{kj} = \sum_{i=1}^{k} n_{ij}.$$

Каждая из сумм чисел n_{xi}, где $i = 1, 2, ..., k$, и n_{yj}, где $j = 1, 2, ..., l$ равна объему *N* выборки:

$$\sum_{i=1}^{k} n_{xi} = \sum_{j=1}^{l} n_{yj} = N.$$

Корреляционная таблица содержит всю информацию, полученную в результате выборочных наблюдений величин *X* и *Y*.

С помощью корреляционной таблицы для каждого значения x_i можно записать соответствующее эмпирическое распределение величины Y (табл. 9.4).

В первой строке этой таблицы перечислены все встречающиеся в выборке значения величины *Y*, во второй – соответствующие частоты.

Таблица 9.4

y_1	y_2	y_3	…	y_j	…	y_l
n_{i1}	n_{i2}	n_{i3}	…	n_{ij}	…	n_{il}

На основании данных таблицы 9.4 можно определить условные средние значения величины *Y*, соответствующие значению $X = x_i$, по формуле среднего арифметического:

$$\overline{y}_{xi} = (n_{i1}y_1 + n_{i2}y_2 + ... + n_{il}y_l)/(n_{i1} + n_{i2} + ... + n_{il}) = \sum_{j=1}^{l} n_{ij}y_j / n_{xi}$$

Если подобным образом определить средние значения $\overline{y}_{x1}, \overline{y}_{x2},...,$ $\overline{y}_{xi},..., \overline{y}_{xk}$, то можно составить таблицу, в первой строке которой перечислены все встречающиеся в выборке значения величины *X*, а во второй – соответствующие условные средние значения величины *Y* (табл. 9.5)

Таблица 9.5

X	x_1	x_2	…	x_i	…	x_k
$\overline{Y}_x$	$\overline{y}_{x1}$	$\overline{y}_{x2}$	…	$\overline{y}_{xi}$	…	$\overline{y}_{xk}$

Таблицу 9.5 можно рассматривать как зависимость условного среднего значения величины *Y* от величины *X*, т.е. как экспериментальную корреляционную зависимость.

Если построить точки $(x_i, \overline{y}_{xi})$ в прямоугольной системе координат, то характер расположения этих точек может привести к предположению о форме корреляционной зависимости величины *Y* от *X* в генеральной статистической совокупности.

Аналогично можно с помощью корреляционной таблицы для каждого значения y_j величины Y составить таблицу эмпирического распределения величины *X* (табл. 9.6).

Таблица 9.6

x_1	x_2	x_3	…	x_i	…	x_k
n_{1j}	n_{2j}	n_{3j}	…	n_{ij}	…	n_{kj}

Условные средние значения величины *X*, соответствующие каждому из значений y_j ($j = 1, 2, ..., l$), можно вычислить по формуле

$$\overline{x}_{yj}=(n_{1j}x_1+n_{2j}x_2+...+n_{kj}x_k)/(n_{1j}+n_{2j}+...+n_{kj})=\sum_{i=1}^{k}n_{ij}x_i/n_{yj}$$

и составить таблицу, отражающую экспериментальную зависимость условного среднего значения величины X от Y (табл. 9.7).

Таблица 9.7

Y	y_1	y_2	…	y_j	…	y_l
$\overline{X}_y$	$\overline{x}_{y1}$	$\overline{x}_{y2}$	…	$\overline{x}_{yj}$	…	$\overline{x}_{yl}$

Построив в прямоугольной системе координат точки $(Y;\overline{X}_y)$, по характеру их расположения можно определить форму корреляционной зависимости величины X от Y, если эта зависимость наблюдается.

Таким образом, составление корреляционной таблицы и на основании ее таблиц типа 9.4 и 9.5, 9.6 и 9.7, а также графическое изображение полученных результатов позволяет высказать предположение о той или иной форме (например, линейной или квадратической) корреляционной зависимости величины Y от величины X и наоборот.

§ 9.4. Линейная корреляция и её характеристики. Понятие о коэффициенте корреляции

Задача **корреляционного анализа** заключается в обосновании **силы** и **тесноты** корреляционной связи. Задачей же **регрессионного анализа** является обоснование **формы** зависимости между X и Y (линейная, криволинейная).

Исторически теорию корреляции в биологии стали применять раньше, чем в других областях естествознания. Французский биолог Ж. Кювье в 1800-1805 годах в «Лекциях по сравнительной анатомии» сформулировал известный принцип биологической корреляции: любая часть организма непременно согласована с другими частями, следовательно, по одному органу можно судить о целом организме. В 1899 году англичанин К. Пирсон – создатель математической теории корреляции – вывел формулу, связывающую рост современного человека с длиной его бедра. Используя эту формулу, по длине ископаемого бедра Пирсон определил рост доисторического человека.

Для характеристики **формы** уравнения связи, в первую очередь необходимо учитывать теоретические соображения относительно характера связи между рассматриваемыми величинами. Характер расположения точек корреляционного поля позволяет делать вывод о форме связи. Вытянутая форма корреляционного поля и угол с осями графика, близкий к 45^0, указывает на наличие линейной корреляционной зависимости (рис. 9.3 г, д). Если же скопление точек образует круг или эллипс, длинная ось которого параллельна одной из осей координат, то можно предположить, что линейная корреляционная зависимость между величинами не просматривается (рис. 9.3 а).

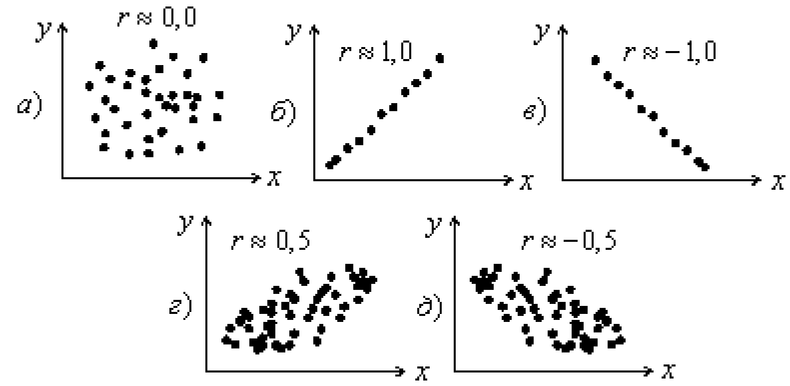


Рис. 9.3

Силу связи между X и Y выражает найденный методом наименьших квадратов коэффициент «*a*» (наклон), который в корреляционном анализе называют **коэффициентом регрессии** и обозначают ρ_{yx}. Коэффициент регрессии ρ_{yx} показывает, на сколько единиц изменится в среднем Y, если изменение X произойдёт ровно на единицу. Чем больше ρ_{yx}, тем связь сильнее. Линейное уравнение регрессии можно записать в общепринятой форме

$$y-\bar{y}=\rho_{yx}(x-\bar{x}).$$

Тесноту связи (степень разброса точек) оценивают с помощью **коэффициента корреляции r**:

$$r=\frac{\overline{xy}-\bar{x}\cdot\bar{y}}{\sigma_x\sigma_y}.$$

На практике мы имеем данные не обо всей генеральной совокупности, а только о тех величинах, что получены из эксперимента (выборка). Поэтому определяют **выборочный коэффициент корреляции r_s,** приближённо равный генеральному коэффициенту корреляции r. Обозначая средние квадратические отклонения для выборки s_x и s_y, получим:

$$r_в=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{s})(y_i-\bar{y})}{s_x s_y}=\frac{\overline{xy}-\bar{x}\cdot\bar{y}}{\sqrt{\overline{x^2}-(\bar{x})^2}\sqrt{\overline{y^2}-(\bar{y})^2}},$$

где $s_x = \sqrt{\overline{x^2} - (\overline{x})^2}$, $s_y = \sqrt{\overline{y^2} - (\overline{y})^2}$, $\overline{x^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}$, $\overline{y^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}{n}$.

Основные свойства выборочного коэффициента корреляции

1. Коэффициент корреляции двух величин, не связанных линейной корреляционной зависимостью, равен нулю.

2. Коэффициент корреляции двух величин, связанных линейной корреляционной зависимостью, равен 1 в случае возрастающей зависимости и -1 в случае убывающей зависимости.

3. Абсолютная величина коэффициента корреляции двух величин, связанных линейной корреляционной зависимостью, удовлетворяет неравенству $|r| \le 1$. При этом коэффициент корреляции положителен, если корреляционная зависимость возрастающая, и отрицателен, если корреляционная зависимость убывающая.

4. Чем ближе $|r|$ к единице, тем теснее корреляция между величинами *Y*, *X*.

По своему характеру корреляционная связь может быть прямой и обратной, а по силе – сильной, средней, слабой. Кроме того, связь может отсутствовать или быть полной (функциональной).

Сила и характер связи между параметрами

Сила связи	**Характер связи**	
	Прямая (+)	**Обратная (–)**
Полная (функциональная)	1	-1
Сильная	от 0,7 до 1	от -0,7 до -1
Средняя (умеренная)	от 0,3 до 0,7	от -0,3 до -0,7
Слабая	от 0,3 до 0	от -0,3 до 0
Связь отсутствует	0	0

Между коэффициентом регрессии ρ_{yx} и коэффициентом корреляции r существует тесная связь: $\rho_{yx} = r\frac{s_y}{s_x}$, поэтому $b = \overline{y} - \rho_{yx}\overline{x}$.

Тогда **прогнозируемое значение *y*** при данном значении *x* равно:

$$y(x) = \rho_{yx}x + b = r\frac{s_y}{s_x}x + (\overline{y} - r\frac{s_y}{s_x}\overline{x}).$$

§ 9.5. Проверка значимости коэффициента корреляции

Коэффициент корреляции, как и любой другой выборочный показатель, служит оценкой своего генерального параметра. Выборочный коэффициент линейной корреляции $r_в$ – величина случайная, так как он вычисляется по значениям переменных, случайно попавшим в выборку из генеральной совокупности, а значит, как и любая случайная величина, имеет ошибку.

Чтобы выяснить, находятся ли случайные величины X и Y генеральной совокупности в линейной корреляционной зависимости, надо проверить значимость $r_в$. Для этого проверяют нулевую гипотезу о равенстве нулю коэффициента корреляции генеральной совокупности $H_0 : r = 0$, то есть линейная корреляционная связь между признаками X и Y случайна. Выдвигается альтернативная гипотеза $H_1 : r \neq 0$, то есть эта линейная корреляционная связь имеется. Задается уровень значимости, например, $\alpha = 0{,}05$.

Критерием для проверки нулевой гипотезы является величина $t_{набл}$:

$$t_{набл} = \frac{r_в \sqrt{n-2}}{\sqrt{1 - r_в^{\,2}}}$$

Далее по таблице критических значений распределения Стьюдента (см. приложение 7) при заданном уровне значимости α (связанном с доверительной вероятностью соотношением $\alpha = 1 - \gamma$) и при числе степеней свободы $f = n - 2$ находим критическое значение $t_{кр}$ для двусторонней критической области.

Затем сравнивают $t_{набл}$ и $t_{кр}$: если $|t_{набл}| > t_{кр}$, то при принятом уровне значимости делают вывод о **значимости коэффициента корреляции** (наличие корреляционной связи между признаками), в противном случае линейная связь может быть вызвана случайными факторами. Если коэффициент корреляции оказывается значимым, то можно предсказать значение величины *Y* при любом значении *X*.

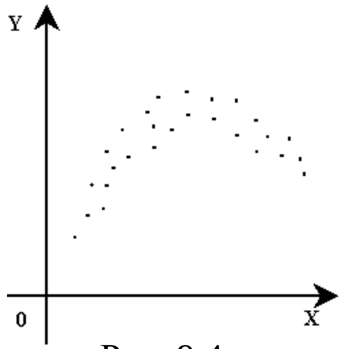


Рис. 9.4

Замечание: Коэффициент корреляции характеризует связь между величинами, **но не объясняет её**. Наличие корреляции между X и Y может быть вызвано тем, что: величина X влияет на Y; величина Y влияет на X; на X и Y влияет третий скрытый фактор, что создаёт впечатление связи между X и Y (ложная корреляция).

Кроме того, если $r = 0$, то это не всегда говорит об отсутствии статистической связи между X и Y – связь может быть и нелинейная (рис. 9.4).

Пример 9.2. Имеется выборка из 10 наблюдений роста отцов (x) и их взрослых сыновей (y), см:

x_i	180	172	173	169	175	170	179	170	167	174
y_i	186	180	176	171	182	166	182	172	169	177

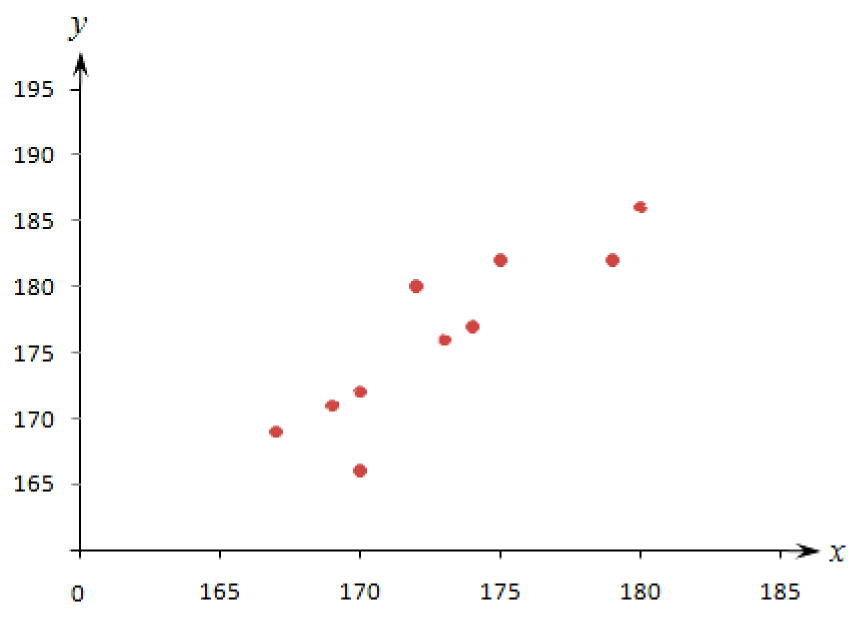
1. Установить, имеется ли корреляционная связь между величинами x и y.
2. Найти выборочный коэффициент корреляции r и определить тесноту корреляционной связи.
3. Записать уравнение регрессии.
4. Проверить, зависит ли рост взрослых сыновей от роста их отцов.

Решение.

1. Построим корреляционное поле точек, отложив вдоль оси абсцисс величину роста отцов, а вдоль оси ординат – величину роста взрослых сыновей. Тогда каждой паре значений x и y на графике будет соответствовать определённая точка. По характеру расположения точек можно предположить существование линейной корреляционной связи между x и y.

2. Коэффициент линейной корреляции вычислим по формуле

$$r_в = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y}}{\sqrt{\overline{x^2} - (\overline{x})^2}\sqrt{\overline{y^2} - (\overline{y})^2}},$$



где $\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$; $\overline{y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i$; $\overline{x^2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2$; $\overline{y^2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i^2$;

$$\overline{xy}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\ ,\qquad s_x=\sqrt{\overline{x^2}-(\overline{x})^2}\ ,\qquad s_y=\sqrt{\overline{y^2}-(\overline{y})^2}\ .$$

Для удобства вычислений составим вспомогательную расчетную таблицу (таблица 9.8).

Таблица 9.8

i	x_i	y_i	x_iy_i	x_i^2	y_i^2
1	180	186	33480	32400	34596
2	172	180	30960	29584	32400
3	173	176	30448	29929	30976
4	169	171	28899	28561	29241
5	175	182	31850	30625	33124
6	170	166	28220	28900	27556
7	179	182	32578	32041	33124
8	170	172	29240	28900	29584
9	167	169	28223	27889	28561
10	174	177	30798	30276	31329
	$\sum=1729$ $\overline{x}=172{,}9$	$\sum=1761$ $\overline{y}=176{,}1$	$\sum=304696$ $\overline{xy}=30469{,}6$	$\sum=299105$ $\overline{x^2}=29910{,}5$	$\sum=310491$ $\overline{y^2}=31049{,}1$

$$s_x=\sqrt{29910{,}5-172{,}9^2}=4{,}01;\qquad s_y=\sqrt{31049{,}1-176{,}1^2}=6{,}16;$$

$$r_в=\frac{30469{,}6-172{,}9\cdot 176{,}1}{4{,}01\cdot 6{,}16}=\frac{21{,}91}{24{,}7}=0{,}887.$$

Пользуясь таблицей градации оценки тесноты связи, делаем вывод: связь *x* и *y* сильная, положительная.

3. По формуле $\rho_{yx}= =r\frac{s_y}{s_x}$ находим коэффициент регрессии:

$$\rho_{yx}=0{,}887\frac{6{,}16}{4{,}01}=1{,}3617\,.$$

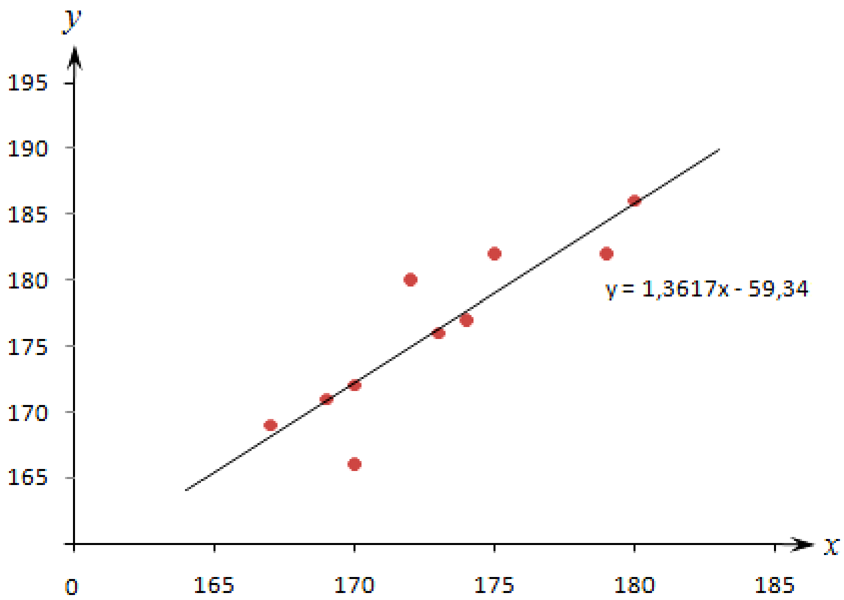
Далее, подставляя ρ_{yx} в формулу $y-\overline{y}=\rho_{yx}(x-\overline{x})$ и вычисляя *b*, находим уравнение регрессии: $y=1{,}3617x-59{,}34$

4. Чтобы проверить, зависит ли рост взрослых сыновей от роста их отцов вычислим величину $t_{набл}$:

$$t_{набл} = \frac{0{,}887 \cdot \sqrt{10-2}}{\sqrt{1-0{,}887^2}} = 5{,}43.$$

По таблице находим величину $t_{кр}(0{,}05;8) = 2{,}31$. Так как $|t_{набл}| > t_{кр}$, то есть $5{,}43 > 2{,}31$, то делаем вывод о значимости коэффициента корреляции, т.е. рост взрослых сыновей зависит от роста их отцов.

Построим прямую регрессии внутри корреляционного поля:



Пример 9.3. В результате регистрации некоторых объектов определенного вида по заданным значениям признаков x и y получены числа (частоты) совпадений заданных значений этих признаков, помещенные в таблице. По данным этой таблицы:

1) определить условные средние значения величин x и y, с их помощью получить изображение корреляционного поля и по характеру расположения точек на нем сделать вывод о типе линии регрессионной зависимости между величинами x и y;

2) найти коэффициенты регрессии y на x и x на y по методу наименьших квадратов;

3) составить уравнения прямых регрессии y на x и x на y;

4) вычислить коэффициент корреляции этих величин;

5) при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверить гипотезу о значимости выборочного коэффициента корреляции;

6) построить систему координат и в ней прямые регрессий.

$y \backslash x$	51	53	55	57	n_y
41	1	2			3
42	2	5	5	2	14
43			2	1	3
n_x	3	7	7	3	20

Решение.

На основании данных, приведенных в таблице, найдем условные средние $\overline{y_{xi}}$ величины y для всех значений x по формуле:

$$\overline{y}_{xi} = \sum_{j=1}^{t} \frac{n_{ij} y_j}{n_{xi}},$$

$$\overline{y}_{x=51} = \frac{1 \cdot 41 + 2 \cdot 42}{3} = 41{,}7; \qquad \overline{y}_{x=53} = \frac{2 \cdot 41 + 5 \cdot 42}{7} = 41{,}7;$$

$$\overline{y}_{x=55} = \frac{5 \cdot 42 + 2 \cdot 43}{7} = 42{,}3; \qquad \overline{y}_{x=57} = \frac{2 \cdot 42 + 1 \cdot 43}{3} = 42{,}3.$$

По полученным результатам составим таблицу:

x	51	53	55	57
$\overline{y_x}$	41,7	41,7	42,3	42,3

На основании данных, приведенных в таблице, найдем условные средние $\overline{x_{yj}}$ величины x для всех значений y по формуле:

$$\overline{x}_{yj} = \sum_{i=1}^{t} \frac{n_{ij} x_i}{n_{yj}},$$

$$\overline{x}_{y=41} = \frac{1 \cdot 51 + 2 \cdot 53}{3} = 52{,}3;$$

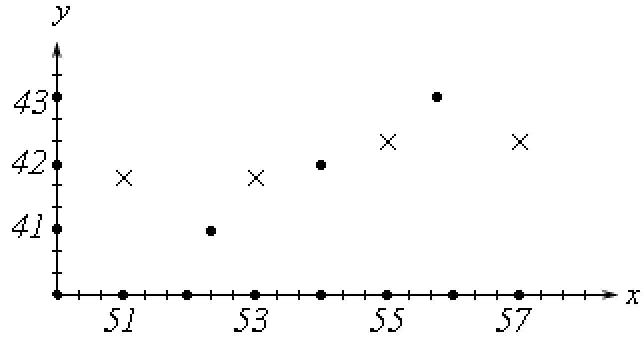
$$\overline{x}_{y=42} = \frac{2 \cdot 51 + 5 \cdot 53 + 5 \cdot 55 + 2 \cdot 57}{14} = 54;$$

$$\overline{x}_{y=43} = \frac{2 \cdot 55 + 1 \cdot 57}{3} = 55{,}7.$$

По полученным результатам составим таблицу:

y	41	42	43
$\overline{x_y}$	52,3	54	55,7

Данные таблиц отражены на рисунке – корреляционном поле (крестики соответствуют данным первой таблицы, точки – данным второй таблицы).



Как видно из рисунка, характер расположения построенных точек указывает на приблизительную линейную зависимость $\overline{y_x}$ от x и $\overline{x_y}$ от y. Поэтому уравнения регрессии следует искать в виде:

$$\overline{y_x} = \rho_{yx} x + b, \quad (*)$$

$$\overline{x_y} = \rho_{xy} y + d, \quad (**)$$

где ρ_{yx}, ρ_{xy} – выборочные коэффициенты регрессии, составим вспомогательную расчетную таблицу для их нахождения. Так как значения вариант признаков X и Y достаточно велики, то введем условные варианты u и v следующим образом:

$C_x = 53$, $C_y = 42$ – варианты x и y, на которые приходятся условные варианты u=v=0. Напомним, что под вариантой мы понимаем наблюдаемое значение признака (см. §6.2).
$h_x = 2$, $h_y = 1$ – длина интервалов вариации значений признаков x и y.

<table>
<tr><td></td><td>u</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>v</td><td>y \ x</td><td>51</td><td>53</td><td>55</td><td>57</td><td>n_{yj}</td><td>$n_{yj} v_j$</td><td>$n_{yj} v_j^2$</td></tr>
<tr><td>-1</td><td>41</td><td>1</td><td>2</td><td></td><td></td><td>3</td><td>-3</td><td>3</td></tr>
<tr><td>0</td><td>42</td><td>2</td><td>5</td><td>5</td><td>2</td><td>14</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>43</td><td></td><td></td><td>2</td><td>1</td><td>3</td><td>3</td><td>3</td></tr>
<tr><td></td><td>n_{xi}</td><td>3</td><td>7</td><td>7</td><td>3</td><td>20</td><td>0</td><td>6</td></tr>
<tr><td></td><td>$n_{xi} u_i$</td><td>-3</td><td>0</td><td>7</td><td>6</td><td>10</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>$n_{xi} u_i^2$</td><td>3</td><td>0</td><td>7</td><td>12</td><td>22</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>$\sum n_{ij} v_j$</td><td>-1</td><td>-2</td><td>2</td><td>1</td><td>0</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>$u_i \sum n_{ij} v_j$</td><td>1</td><td>0</td><td>2</td><td>2</td><td>5</td><td></td><td></td></tr>
</table>

По результатам вычислений, сведенным в таблицу, находим:

$$\overline{u} = \frac{\sum n_{xi} u_i}{n} = \frac{10}{20} = 0{,}5,$$

$$\bar{v} = \frac{\sum n_{yj} v_j}{n} = \frac{0}{20} = 0.$$

Тогда выборочные средние признаков x и y:

$$\bar{x} = C_x + \bar{u} \cdot h_x = 53 + 0{,}5 \cdot 2 = 54,$$

$$\bar{y} = C_y + \bar{v} \cdot h_y = 42 + 0 \cdot 1 = 42$$

Для вычисления дисперсий признаков x и y находим дисперсии условных вариант u и v по формулам:

$$S_u^2 = \overline{u^2} - \left(\bar{u}\right)^2 = \frac{\sum n_{xi} u_i^2}{n} - \left(\frac{\sum n_{xi} u_i}{n}\right)^2 = \frac{22}{20} - (0{,}5)^2 = 1{,}1 - 0{,}25 = 0{,}85,$$

$$S_v^2 = \overline{v^2} - \left(\bar{v}\right)^2 = \frac{\sum n_{yj} v_j^2}{n} - \left(\frac{\sum n_{yj} v_j}{n}\right)^2 = \frac{6}{20} - 0^2 = 0{,}3 - 0 = 0{,}3.$$

Тогда

$$S_u = 0{,}92, \qquad S_v = 0{,}55.$$

$$S_x = S_u \cdot h_x = 0{,}92 \cdot 2 = 1{,}84, \qquad S_y = S_v \cdot h_y = 0{,}55 \cdot 1 = 0{,}55.$$

Коэффициент корреляции признаков x и y совпадает с коэффициентом корреляции условных вариант и вычисляется по формуле:

$$r = \frac{\overline{uv} - \bar{u} \cdot \bar{v}}{S_u \cdot S_v} = \frac{1}{S_u \cdot S_v}\left(\frac{\sum n_{ij} u_i v_j}{n} - \frac{1}{n}\sum n_{xi} u_i \cdot \frac{1}{n}\sum n_{yj} v_j\right) =$$

$$= \frac{1}{0{,}92 \cdot 0{,}55}\left(\frac{5}{20} - 0{,}5 \cdot 0\right) = \frac{0{,}25}{0{,}5} \approx 0{,}5.$$

Следовательно, коэффициенты регрессии:

$$\rho_{yx} = r\frac{S_y}{S_x} = 0{,}5 \cdot \frac{0{,}55}{1{,}84} \approx 0{,}15,$$

$$\rho_{xy} = r\frac{S_x}{S_y} = 0{,}5 \cdot \frac{1{,}84}{0{,}55} \approx 1{,}67;$$

коэффициенты b и d в уравнениях (*) и (**):

$$b = \bar{y} - \rho_{yx}\bar{x} = 42 - 0{,}15 \cdot 54 = 33{,}9,$$

$$d = \bar{x} - \rho_{xy}\bar{y} = 54 - 1{,}67 \cdot 42 = -16{,}14.$$

Таким образом, уравнение прямой регрессии y на x запишется в виде:

$$\overline{y_x} = 0{,}15x + 33{,}9.$$

Прямая регрессии x на y имеет вид:

$$\overline{x_y} = 1{,}67y - 16{,}14.$$

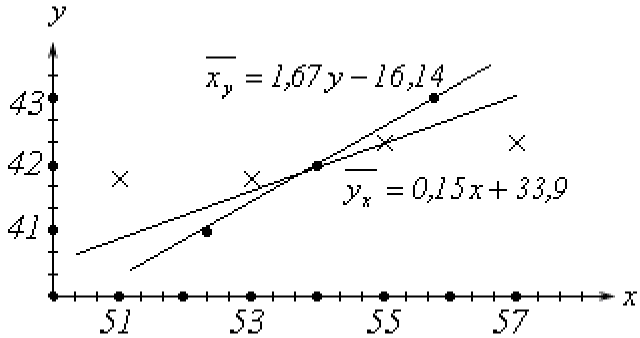
Проверим гипотезу о значимости полученного выборочного коэффициента корреляции $r = 0{,}5$. Определим экспериментальное значение t-критерия:

$$t_{эксп} = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} = \frac{0{,}5\cdot\sqrt{20-2}}{\sqrt{1-(0{,}5)^2}} \approx 2{,}44.$$

Далее по таблице критических значений распределения Стьюдента при заданном уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ и числе степеней свободы $f = n-2 = 20-2 = 18$ находим критическое значение $t_{кр}$ для двусторонней критической области: $t_{кр} = 2{,}10$.

Так как $|t_{эксп}| < t_{кр}$, можно сделать вывод о незначительности выборочного коэффициента корреляции.

Построим прямые регрессии внутри корреляционного поля:



§ 9.6. Понятие о множественной корреляции

В тех случаях, когда исследуется корреляционная связь между величинами, число которых более двух, вводят понятие **множественной корреляции.**

Так, при исследовании в количественной фармакологии корреляционной связи между дозой X, временем Y и наблюдаемым эффектом Z можно ввести уравнение регрессии

$$\overline{Z}_{xy} = f(x,y),$$

где $\overline{Z}_{xy}$ – среднее значение величины Z, соответствующее определенным значениям X и Y. Геометрической интерпретацией этого уравнения является некоторая поверхность в прямоугольной системе координат в пространстве.

Уравнения регрессии могут быть составлены также по результатам исследований корреляционной зависимости наблюдаемого эффекта от доз применяемых препаратов при комбинированном действии нескольких (двух и более) видов лекарственных веществ.

В наиболее простом случае линейной корреляционной зависимости эффекта Z от доз X и Y двух препаратов выборочное уравнение регрессии имеет вид

$$\overline{Z}_{xy} = Ax + By + C,$$

где коэффициенты регрессии *A*, *B* и параметр *C* соответственно равны:

$$A = \frac{r_{xz} - r_{yz} \cdot r_{xy}}{1 - r_{xy}^2} \cdot \frac{s_z}{s_x}; \qquad B = \frac{r_{yz} - r_{xz} \cdot r_{xy}}{1 - r_{xy}^2} \cdot \frac{s_z}{s_y};$$

$$C = \overline{z} - A\overline{x} - B\overline{y}.$$

Здесь r_{xy}, r_{xz}, r_{yz} – выборочные коэффициенты линейной корреляции между соответствующими величинами; s_x, s_y, s_z – оценки средних квадратических отклонений; $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}$ – средние значения.

Формула выборочного совокупного коэффициента корреляции имеет вид:

$$R = \sqrt{\frac{r_{xz}^2 - 2r_{xy}r_{xz}r_{yz} + r_{yz}^2}{1 - r_{xy}^2}}.$$

С ее помощью оценивают тесноту корреляционной связи величины *Z* с *X* и *Y*.

Вопросы для самоконтроля

1. Какая связь между *X* и *Y* называется функциональной? статистической? корреляционной?
2. Что такое корреляционное поле?
3. Что такое регрессия? линия регрессии? Запишите соответствующие формулы.
4. В чем преимущество регрессии по сравнению с корреляцией?
5. В чем состоит метод наименьших квадратов? Запишите расчётные формулы для a и b.
6. Какие задачи решает корреляционный и регрессионный анализ?
7. Как оценить форму связи?
8. Какая разница между положительной и отрицательной корреляциями?
9. Как найти коэффициент линейной регрессии ρ_{yx} (два способа) и сдвиг b?
10. Что оценивают с помощью коэффициента корреляции? Запишите расчётную формулу для коэффициента корреляции и его свойства.
11. В каком диапазоне значений находится коэффициент корреляции, если теснота связи слабая, умеренная, сильная, функциональная?
12. Всегда ли при $r = 0$ корреляционная связь отсутствует?
13. Как проверить значимость коэффициента корреляции? Запишите соответствующие формулы.
14. Как найти прогнозируемое значение y при данном x?
15. С какой целью составляют корреляционную таблицу?

16. Перечислите все этапы оценки линейной корреляции по сгруппированным данным.
17. Дайте понятие множественной корреляции.

Задания для решения

1. Построить корреляционное поле точек и вычислить коэффициент корреляции между ростом (X) и массой (Y) некоторых животных. Исходные данные приведены в выборке объема n = 10.

x_i	31	32	33	34	35	35	40	41	42	46
y_i	7,8	8,1	7,6	9,1	9,6	9,8	11,8	17,1	14,7	13,0

2. По данным таблицы исследовать зависимость урожайности зерновых культур Y (кг/га) от количества осадков X (см), выпавших в вегетационный период.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
x_i	25	27	30	35	36	38	39	41	42	45	46	47	50	52	53
y_i	23	24	27	27	32	31	33	35	34	32	29	28	25	24	25

Построить корреляционное поле точек и предложить наиболее подходящий вид уравнения регрессии.

3. Изучали зависимость между содержанием коллагена Y и эластина X в магистральных артериях головы (г/100 г сухого вещества, возраст 36-50 лет). Результаты наблюдений приведены в виде двумерной выборки объема 5:

x_i	13,98	15,84	7,26	7,74	8,82
y_i	32,50	42,82	47,79	43,29	49,47

Провести корреляционно-регрессионный анализ:

1) построить корреляционное поле точек;

2) проверить значимость коэффициента корреляции между переменными X и Y, уровень значимости α=0,05.

3) построить линию регрессии.

4. Изучали зависимость между систолическим давлением Y (мм. рт. ст.) у мужчин в начальной стадии шока и возрастом X (годы). Результаты наблюдений приведены в виде двумерной выборки объема 11:

x_i	68	37	50	53	75	66	52	65	74	65	54
y_i	114	149	146	141	114	112	124	105	141	120	124

Провести корреляционно-регрессионный анализ:

1) построить корреляционное поле точек;

2) проверить значимость коэффициента корреляции между переменными X и Y, уровень значимости α=0,05.

3) построить линию регрессии.

5. Имеется двумерная выборка объемом 9: X – масса новорожденных павианов-гамадрилов (кг) и Y – масса их матерей (кг).

x_i	0,70	0,73	0,75	0,70	0,65	0,70	0,61	0,70	0,63
y_i	10,0	10,8	11,3	10,0	11,1	11,3	10,2	13,5	12,0

Провести корреляционно-регрессионный анализ:

1) построить корреляционное поле точек;

2) проверить значимость коэффициента корреляции между переменными X и Y, уровень значимости α=0,05.

3) построить линию регрессии.

6. Изучали зависимость между суточной выработкой продукции на медицинском предприятии Y (т) и величиной основных производственных фондов X (млн. руб). Результаты наблюдений приведены в виде двумерной выборки объема 5:

x_i	25,5	29,5	31,9	35,4	39,2
y_i	9	13	17	21	25

Провести корреляционно-регрессионный анализ:

1) построить корреляционное поле точек;

2) проверить значимость коэффициента корреляции между переменными X и Y, уровень значимости α=0,05.

3) построить линию регрессии.

7. Изучали зависимость между минутным объемом сердца Y (л/мин) и средним давлением в левом предсердии X (см рт. ст.). Результаты наблюдений приведены в виде двумерной выборки объемом 5:

x_i	4,8	6,4	9,3	11,2	17,7
y_i	0,40	0,69	1,29	1,64	2,40

Провести корреляционно-регрессионный анализ:

1) построить корреляционное поле точек;

2) проверить значимость коэффициента корреляции между переменными X и Y, уровень значимости α=0,05.

3) построить линию регрессии.

8. Изучали зависимость между объемом Y (мкм^3) и диаметром X (мкм) сухого эритроцита у млекопитающих. Результаты наблюдений приведены в виде двумерной выборки объемом 9:

x_i	7,6	8,9	5,5	9,2	3,5	4,8	7,3	7,4	6,8
y_i	87	81	50	112	18	37	71	69	54

Провести корреляционно-регрессионный анализ:

1) построить корреляционное поле точек;

2) проверить значимость коэффициента корреляции между переменными X и Y, уровень значимости α=0,05.

3) построить линию регрессии.

9. Изучали зависимость между количеством гемоглобина в крови (%) Y и массой животных X (кг). Результаты наблюдений приведены в виде двумерной выборки объема 9:

x_i	17,7	18,0	18,0	19,0	19,0	20,0	21,0	22,0	30,0
y_i	74	70	80	72	77	76	89	80	86

Провести корреляционно-регрессионный анализ:

1) построить корреляционное поле точек;

2) проверить значимость коэффициента корреляции между переменными X и Y, уровень значимости α=0,05.

3) построить линию регрессии.

10. Изучали зависимость между массой тела гамадрилов-матерей X (кг) и их новорожденных детенышей Y (кг). Под наблюдением находилось 20 обезьян.

x_i	10,0	10,8	11,3	10,0	10,1	11,3	10,2	13,5	12,3	14,5
	11,0	12,0	11,8	13,4	11,4	12,0	15,5	13,0	12,1	11,0
y_i	0,70	0,73	0,75	0,70	0,65	0,65	0,70	0,61	0,70	0,63
	0,65	0,72	0,69	0,78	0,70	0,0	0,85	0,80	0,75	0,65

Провести корреляционно-регрессионный анализ:

1) построить корреляционное поле точек;

2) проверить значимость коэффициента корреляции между переменными X и Y, уровень значимости α=0,05.

3) построить линию регрессии.

11. Изучали зависимость между площадью поверхности тела Y (м^2) и ростом женщин X (см). Результаты наблюдений приведены в виде выборки объемом 11:

x_i	157	169	155	168	152	152	169	152	152	154	161
y_i	1,74	1,74	1,67	1,51	1,52	1,55	1,58	1,58	1,44	1,67	1,42

Провести корреляционно-регрессионный анализ:

1) построить корреляционное поле точек;

2) проверить значимость коэффициента корреляции между переменными X и Y, уровень значимости α=0,05.

3) построить линию регрессии.

12 – 15. В результате регистрации некоторых объектов определенного вида по заданным значениям признаков x и y получены числа (частоты) совпадений заданных значений этих признаков, помещенные в следующей таблице (см. табл.). По данным этой таблицы:

1) определить условные средние значения величин x и y, с их помощью получить изображение корреляционного поля и по характеру расположения точек на нем сделать вывод о типе линии регрессионной зависимости между величинами x и y;

2) найти коэффициенты регрессии y на x и x на y по методу наименьших квадратов;

3) составить уравнения прямых регрессии y на x и x на y;

4) вычислить коэффициент корреляции этих величин;

5) при уровне значимости α = 0,05 проверить гипотезу о значимости выборочного коэффициента корреляции;

6) построить систему координат и в ней прямые регрессий.

12.

y \ x	111	113	115	117
44	1	1		
45	1	2	2	1
46			1	1

13.

y \ x	41	43	45	47
31		1	2	1
32	2	4	4	2
33	1	2	1	

14.

y \ x	111	113	115	117
11			2	1
12	2	5	5	2
13	1	2		

15.

y \ x	71	73	75	77
61	1	2	1	
62	2	4	4	2
63		1	2	1

ГЛАВА X
ОСНОВЫ ДИСПЕРСИОННОГО АНАЛИЗА

§ 10.1. Понятие о дисперсионном анализе

В практической деятельности врачей при проведении медико-биологических, социологических и экспериментальных исследований возникает необходимость установить влияние факторов на результаты изучения состояния здоровья населения, при оценке профессиональной деятельности, эффективности нововведений.

Существует ряд статистических методов, позволяющих определить силу, направление, закономерности влияния факторов на результат в генеральной или выборочной совокупностях (корреляционный анализ, регрессия и др.). Дисперсионный анализ был разработан и предложен английским ученым, математиком и генетиком Рональдом Фишером в 20-х годах XX века.

Дисперсионный анализ чаще используют в научно-практических исследованиях общественного здоровья и здравоохранения для изучения влияния одного или нескольких факторов на результативный признак.

Сущность метода дисперсионного анализа заключается в измерении отдельных дисперсий (общая, факторная, остаточная), и дальнейшем определении силы влияния изучаемых факторов (оценки роли каждого из факторов, либо их совместного влияния) на результативный признак.

Дисперсионный анализ – это статистический метод анализа результатов наблюдений, зависящих от различных одновременно действующих факторов, основанный на сравнении оценок дисперсий соответствующих групп выборочных данных.

Под **фактором** понимают различные, независимые, качественные показатели, влияющие на изучаемей признаки. Факторы обозначаются прописными начальными буквами латинского алфавита. Например: *A, B, C*…. Факторы, контролируемые и измеряемые в процессе исследования, называются **регулируемыми**.

Важным методическим значением для применения дисперсионного анализа является правильное формирование выборки. В зависимости от поставленной цели и задач выборочные группы могут формироваться случайным образом независимо друг от друга (контрольная и экспериментальная группы для изучения некоторого показателя, например, влияние высокого артериального давления на развитие инсульта). Такие выборки называются **независимыми**.

Нередко результаты воздействия факторов исследуются у одной и той же выборочной группы (например, у одних и тех же пациентов) до и после воздействия (лечение, профилактика, реабилитационные мероприятия), такие выборки называются **зависимыми**.

Дисперсионный анализ, в котором проверяется влияние одного фактора, называется **однофакторным** (одномерный анализ). При изучении влияния более чем одного фактора используют **многофакторный** дисперсионный анализ (многомерный анализ).

Признаки, изменяющиеся под воздействием тех или иных факторов, называют **результативными**. Для их обозначения используются конечные буквы латинского алфавита: X, Y, Z.

Для проведения дисперсионного анализа могут использоваться как качественные (пол, профессия), так и количественные признаки (число инъекций, больных в палате, число койко-дней).

Методы дисперсионного анализа:

1. Метод по Фишеру (Fisher) – критерий F. Метод применяется в однофакторном дисперсионном анализе, когда совокупная дисперсия всех наблюдаемых значений раскладывается на дисперсию внутри отдельных групп и дисперсию между группами.

2. Метод "общей линейной модели". В его основе лежит корреляционный или регрессионный анализ, применяемый в многофакторном анализе.

Обычно в медико-биологических исследованиях используются только однофакторные, максимум двухфакторные дисперсионные комплексы. Многофакторные комплексы можно исследовать, последовательно анализируя одно- или двухфакторные комплексы, выделяемые из всей наблюдаемой совокупности.

Условия применения дисперсионного анализа:

1. Задачей исследования является определение силы влияния одного (до 3) факторов на результат или определение силы совместного влияния различных факторов (пол и возраст, физическая активность и питание и т.д.).

2. Изучаемые факторы должны быть независимые (несвязанные) между собой. Например, нельзя изучать совместное влияние стажа работы и возраста, роста и веса детей и т.д. на заболеваемость населения.

3. Подбор групп для исследования проводится рандомизированно (случайный отбор). Организация дисперсионного комплекса с выполнением принципа случайности отбора вариантов называется рандомизацией (перев. с англ.– random), т.е. выбранные наугад.

4. Можно применять как количественные, так и качественные (атрибутивные) признаки.

§ 10.2. Однофакторный дисперсионный анализ при одинаковом числе испытаний на уровнях

Рассмотрим нормально распределенную величину X, на которую действует некоторый фактор A, имеющий l постоянных уровней, причем на всех уровнях распределение значений X является нормальным, а дисперсии одинаковы, хотя и неизвестны.

Пусть число проведенных наблюдений при действии каждого из уровней фактора одинаково (q) и результаты представлены в таблице 10.1

Таблица 10.1

Номер испытания	Уровень фактора A_j				
	A_1	A_2	A_3	…	A_l
1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	…	x_{1l}
2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	…	x_{2l}
3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	…	x_{3l}
…	…	…	…	…	…
q	x_{q1}	x_{q2}	x_{q3}	…	x_{ql}
Групповая средняя $\overline{x_j}$	$\overline{x_1}$	$\overline{x_2}$	$\overline{x_3}$	…	$\overline{x_l}$

Все значения величины X, наблюдаемые при каждом фиксированном уровне фактора A_j, составляют группу, и в последней строке табл. 10.1 представлены соответствующие выборочные групповые средние, вычисленные по формуле

$$\overline{x_j} = \sum_{i=1}^{q} \frac{x_{ij}}{q}.$$

В основе однофакторного дисперсионного анализа лежит тесная связь между различием в групповых средних $\overline{x_j}$ и соотношением между двумя видами дисперсий – остаточной и факторной, которые рассчитываются по формулам:

$$S^2_{факт} = \frac{\sum_{j=1}^{l} \frac{R_j^2}{q} - \frac{1}{lq}\left(\sum_{j=1}^{l} R_j\right)^2}{l-1}, \qquad S^2_{ост} = \frac{\sum_{j=1}^{l} P_j - \frac{1}{q}\sum_{j=1}^{l} R_j^2}{l(q-1)}.$$

Здесь $R_j = \sum_{i=1}^{q} x_{ij}$ – сумма значений величины X на уровне A_j; $P_j = \sum_{i=1}^{q} {x_{ij}}^2$ – сумма квадратов значений величины X на уровне A_j.

В методе однофакторного дисперсионного анализа факторная дисперсия характеризует влияние фактора на исследуемую величину, а остаточная – влияние случайных причин, в связи с чем справедливо следующее правило.

Правило 10.1. Если $S^2_{факт} < S^2_{ост}$, то следует сделать вывод об отсутствии существенного влияния фактора *A* на величину *X*. Если же $S^2_{факт} > S^2_{ост}$, то необходимо проверить значимость различия этих дисперсий, т. е. при заданном (или выбранном) уровне значимости α проверить нулевую гипотезу о равенстве соответствующих генеральных дисперсий $\sigma^2_{факт} = \sigma^2_{ост}$ при конкурирующей гипотезе вида $\sigma^2_{факт} > \sigma^2_{ост}$. При этом возможны следующие варианты.

1. Если проверка покажет значимость различия между $S^2_{факт}$, для которой число степеней свободы $f_1 = l - 1$, и $S^2_{ост}$ для которой $f_2 = l(q-1)$, то отсюда также следует значимость различия между найденными по результатам наблюдений выборочными групповыми средними, что соответствует выводу о существенном влиянии фактора *A* на величину *X*.

2. Если различие между факторной и остаточной дисперсиями окажется незначимым, то нельзя сделать вывод о существенном влиянии фактора *A* на величину *X*.

Обычно для упрощения расчетов факторную и остаточную дисперсию рассчитывают не по экспериментальным значениям x_{ij} величины *X*, а по значениям $y_{ij} = x_{ij} - C$, где *C* представляет собой произвольное число, близкое к среднему значению $\bar{x}$ всех результатов наблюдений x_{ij}.

Пример 10.1. При уровне значимости α=0,05 методом дисперсионного анализа проверить эффективность внешнего воздействия (факторы A_1, A_2, A_3) на темп размножения определенного вида бактерий по данным, приведенным ниже в таблице:

Номер испытания	Уровень фактора A_j		
	A_1	A_2	A_3
1	426	429	430
2	425	433	431
3	427	427	436
4	423	426	429
$\overline{x_j}$	425,3	428,8	431,5

Решение.

Пусть число проведенных наблюдений при действии каждого из уровней фактора A одинаково и равно $q = 4$. Все значения величины X, наблюдаемые при каждом фиксированном уровне фактора A_j, составляют группу, и в последней строке таблицы представим соответствующие выборочные групповые средние, вычисленные по формуле:

$$\overline{x_j} = \sum_{i=1}^{q} \frac{x_{ij}}{q}.$$

Для упрощения расчетов будем использовать не экспериментальные значения x_{ij} величины X, а значения $y_{ij} = x_{ij} - C$, где постоянная C представляет собой произвольное число, близкое к среднему значению $\bar{x}$ всех результатов наблюдений x_{ij}, таким образом:

$$\bar{x} = \sum_{j=1}^{l} \frac{\overline{x_j}}{l} = \frac{425{,}3 + 428{,}8 + 431{,}5}{3} = 428{,}5,$$

где l – количество уровней фактора A ($l = 3$).

Введем новые переменные:

$$y_{ij} = x_{ij} - C = x_{ij} - \bar{x} = x_{ij} - 428{,}5.$$

Преобразуем таблицу с дальнейшим использованием ее в качестве расчетной.

Номер испытания	Уровень фактора A_j		
	A_1	A_2	A_3
	y_{i1}	y_{i2}	y_{i3}
1	-2,5	0,5	1,5
2	-3,5	4,5	2,5
3	-1,5	-1,5	7,5
4	-5,5	-2,5	0,5

С помощью таблицы определим вспомогательные величины:

$$P_j = \sum_{i=1}^{q} y_{ij}^2; \qquad R_j = \sum_{i=1}^{q} y_{ij}$$

$$P_1 = \sum_{i=1}^{4} y_{i1}^2 = (-2{,}5)^2 + (-3{,}5)^2 + (-1{,}5)^2 + (-5{,}5)^2 = 51;$$

$$P_2 = \sum_{i=1}^{4} y_{i2}^2 = (0{,}5)^2 + (4{,}5)^2 + (-1{,}5)^2 + (-2{,}5)^2 = 29;$$

$$P_3 = \sum_{i=1}^{4} y_{i3}^2 = (1{,}5)^2 + (2{,}5)^2 + (7{,}5)^2 + (0{,}5)^2 = 65;$$

$$R_1 = \sum_{i=1}^{4} y_{i1} = -2{,}5 - 3{,}5 - 1{,}5 - 5{,}5 = -13;$$

$$R_2=\sum_{i=1}^{4}y_{i2}=0{,}5+4{,}5-1{,}5-2{,}5=1;$$

$$R_3=\sum_{i=1}^{4}y_{i3}=1{,}5+2{,}5+7{,}5+0{,}5=12.$$

Рассчитаем значения факторной и остаточной дисперсии:

$$S^2_{факт}=\frac{\sum\limits_{j=1}^{l}\frac{R_j^2}{q}-\frac{1}{lq}\left(\sum\limits_{j=1}^{l}R_j\right)^2}{l-1}, \qquad S^2_{ост}=\frac{\sum\limits_{j=1}^{l}P_j-\frac{1}{q}\sum\limits_{j=1}^{l}R_j^2}{l(q-1)},$$

таким образом, получим:

$$S^2_{факт}=\frac{\frac{1}{4}\cdot\left[(-13)^2+1^2+12^2\right]-\frac{1}{4\cdot 3}\left[-13+1+12\right]^2}{3-1}=39{,}25,$$

$$S^2_{ост}=\frac{(51+29+65)-\frac{1}{4}\cdot\left[(-13)^2+1^2+12^2\right]}{3(4-1)}=7{,}4.$$

Так как $S^2_{факт}>S^2_{ост}$, то следует проверить значимость их различия.

Вычислим экспериментальное значение критерия:

$$F_{эксп}=\frac{S^2_{ф}}{S^2_{ост}}=\frac{39{,}25}{7{,}4}=5{,}3.$$

По таблице критических значений распределений Фишера – Снедекора при уровне значимости α = 0,05, определим критическое значение $F_{кр}(\alpha, f_1, f_2)$. Здесь $f_1=l-1=3-1=2$ – число степеней свободы факторное, $f_2=l(q-1)=3(4-1)=9$ – число степеней свободы остаточное. Таким образом:

$$F_{кр}(\alpha, f_1, f_2)=F_{кр}(0{,}05;2;9)=4{,}26$$

Так как $F_{эксп}>F_{кр}$, то нулевая гипотеза отвергается в пользу конкурирующей, т.е. групповые средние различаются значимо. Внешнее воздействие надо признать эффективным.

§ 10.3. Однофакторный дисперсионный анализ при неодинаковом числе испытаний на уровнях

Если число испытаний, проведенных на различных уровнях действия фактора, различно, а именно: на уровне A_1 проведено q_1 испытаний, на уровне A_2 – q_2 испытаний и т.д., на уровне A_l – q_l испытаний, то факторную и остаточную дисперсии находят по следующим формулам:

$$S_{факт}^2 = \frac{\sum_{j=1}^{l}\frac{R_j^2}{q_j} - \left(\sum_{j=1}^{l} R_j\right)^2 / N}{l-1}, \qquad S_{ост}^2 = \frac{\sum_{j=1}^{l} P_j - \sum_{j=1}^{l}\frac{R_j^2}{q_j}}{N-l}.$$

Здесь $R_j = \sum_{i=1}^{q_j} x_{ij}$ – сумма значений величины X на уровне A_j; $N = \sum_{j=1}^{l} q_j$ – общее количество результатов испытаний; $P_j = \sum_{i=1}^{q_j} x_{ij}{}^2$ – сумма квадратов значений величины X на уровне A_j.

Далее следует действовать так же, как и в случае одинакового числа наблюдений на различных уровнях, но при нахождении критического значения распределения Фишера – Снедекора число степеней свободы факторной дисперсии принимают равным $f_1 = l - 1$, остаточной – $f_2 = N - l$.

Обычно для упрощения расчетов от значений x_{ij} переходят к рассмотрению значений $y_{ij} = x_{ij} - C$, где постоянная C близка по величине к общей средней $\bar{x}$ всех измерений величины X.

Пример 10.2. По результатам, представленным в таблице, при уровне значимости α=0,05 проверить, имеется ли различие между способами A_1, A_2, A_3 и A_4 обработки фармацевтического сырья с точки зрения большего выхода продукта.

Номер испытания	Способ обработки A_j			
	A_1	A_2	A_3	A_4
1	70	71	78	73
2	75	70	74	72
3	73	72	70	71
4	72	73	76	74
5	71		72	72
6	74			
$\bar{x}_j$	72,5	71,5	74,0	72,4

Решение.

Предполагая, что распределения значений, характеризующих выход сырья, при каждом способе обработки являются нормальными, а соответствующие генеральные дисперсии равны, применим метод однофакторного дисперсионного анализа. Обработку сырья будем считать фактором, а способы обработки – уровнями.

Общая средняя всех измерений

$$\bar{x} = \sum_{j=1}^{l} \frac{\overline{x_j}}{l} = \frac{72{,}5 + 71{,}5 + 74{,}0 + 72{,}4}{4} = 72{,}65,$$

где l – количество уровней фактора A (l = 4).

Введем новые переменные:

$$y_{ij} = x_{ij} - C = x_{ij} - \bar{x} = x_{ij} - 73.$$

Преобразуем таблицу с дальнейшим использованием ее в качестве расчетной.

Номер испытания	Уровень фактора A_j			
	A_1	A_2	A_3	A_4
	y_{i1}	y_{i2}	y_{i3}	y_{i4}
1	-3	-2	5	0
2	2	-3	1	-1
3	0	-1	-3	-2
4	-1	0	3	1
5	-2		-1	-1
6	1			

С помощью таблицы определим вспомогательные величины:

$$P_j = \sum_{i=1}^{q} {y_{ij}}^2; \qquad R_j = \sum_{i=1}^{q} y_{ij}.$$

$$P_1 = \sum_{i=1}^{6} {y_{i1}}^2 = (-3)^2 + 2^2 + 0^2 + (-1)^2 + (-2)^2 + 1^2 = 19;$$

$$P_2 = 14; \qquad P_3 = 45; \qquad P_4 = 7.$$

$$R_1 = \sum_{i=1}^{6} y_{i1} = (-3) + 2 + 0 + (-1) + (-2) + 1 = -3;$$

$$R_2 = -6; \qquad R_3 = 5; \qquad R_4 = -3.$$

Рассчитаем значения факторной и остаточной дисперсии:

$$S^2_{факт} = \frac{\sum_{j=1}^{l} \frac{R_j^2}{q} - \frac{1}{lq}\left(\sum_{j=1}^{l} R_j\right)^2}{l-1}, \qquad S^2_{ост} = \frac{\sum_{j=1}^{l} P_j - \frac{1}{q}\sum_{j=1}^{l} R_j^2}{l(q-1)}.$$

$$S^2_{факт} = 4{,}95, \qquad S^2_{ост} = 4{,}23,$$

Так как $S^2_{факт} > S^2_{ост}$, следует проверить значимость различия между этими дисперсиями. Вычислим экспериментальное значение критерия:

$$F_{эксп} = \frac{S_ф^2}{S_{ост}^2} = \frac{4{,}95}{4{,}23} \approx 1{,}17\,.$$

По таблице критических значений распределений Фишера – Снедекора при уровне значимости α = 0,05, определим критическое значение $F_{кр}(\alpha, f_1, f_2)$. Здесь $f_1 = l - 1 = 4 - 1 = 3$ – число степеней свободы факторное, $f_2 = N - l = 20 - 4 = 16$ – число степеней свободы остаточное. Таким образом:

$$F_{кр}(\alpha, f_1, f_2) = F_{кр}(0{,}05;3;16) \approx 3{,}24$$

Так как $F_{эксп} < F_{кр}$, то различие между факторной и остаточной дисперсиями не является значимым. В соответствии с методом дисперсионного анализа отсюда следует вывод о незначимости различия между групповыми средними, что соответствует отсутствию существенного различия между рассмотренными способами обработки сырья.

§ 10.4. Понятие о двухфакторном и многофакторном анализах

Оценим влияние двух одновременно действующих факторов A и B на формирование значений нормально распределенной случайной величины X, причем фактор A имеет m уровней действия (A_1, A_2, …, A_m), фактор B – n уровней (B_1, B_2, …, B_n).

Для простоты ограничимся рассмотрением результатов таких экспериментов, когда при действии каждой пары уровней фактора (A_i, B_i) (i=1,2,…,m; j=1,2,…, n) производится лишь одно наблюдение величины X. В этом случае результаты эксперимента могут быть представлены в виде таблицы 10.2.

Таблица 10.2

Уровни A_i	Уровни B_j				$\bar{x}_i^A$
	B_1	B_2	…	B_n	
A_1	x_{11}	x_{12}	…	x_{1n}	$\bar{x}_1^A$
A_2	x_{21}	x_{22}	…	x_{2n}	$\bar{x}_2^A$
…	…	…	…	…	…
A_m	x_{m1}	x_{m2}	…	x_{mn}	$\bar{x}_m^A$
$\bar{x}_j^B$	$\bar{x}_1^B$	$\bar{x}_2^B$	…	$\bar{x}_n^B$	

В последнем столбце таблицы 10.2 представлены средние групповые (по строкам) значения $\overline{x}_i^A = \sum_{j=1}^{n} \frac{x_{ij}}{n}$, в последней строке – средние групповые (по столбцам) $\overline{x}_j^B = \sum_{i=1}^{m} \frac{x_{ij}}{m}$.

В соответствии с методом дисперсионного анализа для проверки значимости различий между отдельными значениями $\overline{x}_i^A$, а также между отдельными значениями $\overline{x}_j^B$ рассчитывают оценки двух факторных S_A^2, S_B^2 и остаточной $S_{ост}^2$ дисперсий по формулам:

$$S_A^2 = \frac{\sum_{i=1}^{m} R_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{m} R_i\right)^2 / m}{n(m-1)}; \qquad S_B^2 = \frac{\sum_{j=1}^{n} V_j^2 - \left(\sum_{i=1}^{m} R_i\right)^2 / n}{m(n-1)};$$

$$S_{ост}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{m} P_i - \sum_{i=1}^{m} R_i^2 / n - \sum_{j=1}^{n} V_j^2 / m + \left(\sum_{i=1}^{m} R_i\right)^2 /(mn)}{(m-1)(n-1)},$$

где $\quad R_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij}; \quad V_j = \sum_{i=1}^{m} x_{ij}; \quad P_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij}^2.$

Поскольку оценки S_A^2, S_B^2 и $S_{ост}^2$ характеризуют роль соответственно фактора A, фактора B и случайных причин, то значимость влияния каждого из факторов A и B на величину X определяют, сравнивая S_A^2 и S_B^2 (в отдельности) с $S_{ост}^2$ так же, как и при однофакторном анализе. При этом числа степеней свободы S_A^2, S_B^2 и $S_{ост}^2$ равны соответственно $m-1$, $n-1$, $(m-1)(n-1)$.

Пример 10.3. При выяснении влияния реагентов A и B на синтез лекарственного препарата получены результаты (выход X в условных единицах), представленные в таблице.

Уровни A_i	Уровни B_j				$\overline{x}_i^A$
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	4,5	3,0	4,0	3,5	3,75
A_2	3,5	2,5	3,5	2,0	2,88
A_3	6,5	5,5	4,5	6,0	5,62
A_4	7,5	7,0	8,5	7,0	7,50
$\overline{x}_j^B$	5,5	4,5	5,12	4,62	

В предположении нормальности распределения величины X методом дисперсионного анализа при уровне значимости 0,05 проверить значимость влияния каждого из реагентов A и B на выход препарата.

Решение.

Найдем значения P_i, R_i и V_j:

$P_1 = 57{,}5$; $P_2 = 34{,}75$; $P_3 = 128{,}75$; $P_4 = 226{,}5$;

$R_1 = 15$; $R_2 = 11{,}5$; $R_3 = 22{,}5$; $R_4 = 30$;

$V_1 = 22$; $V_2 = 18$; $V_3 = 20{,}5$; $V_4 = 18{,}5$.

Вычислим S_A^2, S_B^2 и $S_{ост}^2$:

$$S_A^2 = 16{,}9, \qquad S_B^2 = 0{,}854, \qquad S_{ост}^2 = 0{,}451.$$

Поскольку S_A^2 и S_B^2 превышают $S_{ост}^2$, рассчитаем экспериментальные значения критерия Фишера – Снедекора:

$$F_{эксп}^A = \frac{S_A^2}{S_{ост}^2} \approx 37{,}5; \qquad F_{эксп}^B = \frac{S_B^2}{S_{ост}^2} \approx 1{,}89$$

и сравним их с критическими :

$$F_{кр}^A = F_{кр}(\alpha, m-1, (m-1)(n-1)) = F_{кр}(0{,}05;3;9) \approx 3{,}86;$$

$$F_{кр}^B = F_{кр}(\alpha, n-1, (m-1)(n-1)) = F_{кр}(0{,}05;3;9) \approx 3{,}86.$$

Так как $F_{эксп}^A > F_{кр}^A$, при уровне значимости α = 0,05 следует сделать вывод о существенном влиянии реагента A на выход препарата. В отношении реагента B такого вывода сделать нельзя, поскольку $F_{эксп}^B < F_{кр}^B$.

Вопросы для самоконтроля

1. В чем заключается сущность метода дисперсионного анализа?
2. Что понимается под фактором? Приведите примеры.
3. Какие факторы называются регулируемыми?
4. Какие выборки называются независимыми, зависимыми?
5. Какой дисперсионный анализ называется однофакторным?
6. Что понимается под результативными признаками?
7. Перечислите методы дисперсионного анализа.
8. Назовите условия применимости дисперсионного анализа.
9. Что понимают под выборочными групповыми средними при одинаковом числе испытаний? Запишите соответствующие формулы.
10. В чем заключается метод дисперсионного анализа при одинаковом числе испытаний на уровнях?

11. Что такое остаточная дисперсия при одинаковом числе испытаний на уровнях? Запишите формулу.
12. Что такое факторная дисперсия при одинаковом числе испытаний на уровнях? Запишите формулу.
13. При каком условии можно сделать вывод об отсутствии существенного влияния фактора A на величину X при одинаковом числе испытаний на уровнях?
14. Запишите формулы, по которым находят остаточную и факторную дисперсии при неодинаковом числе испытаний.
15. В чем заключается метод дисперсионного анализа при неодинаковом числе испытаний на уровнях?
16. Опишите понятие двухфакторного дисперсионного анализа.
17. В чем заключается многофакторный дисперсионный анализ?
18. Запишите формулы для расчета двухфакторных остаточных и факторных дисперсий.

Задания для решения

1. Проведено исследование влияния трех уровней фактора A на 4 испытуемых. Методом дисперсионного анализа при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверить нулевую гипотезу о влиянии фактора A на результативный признак. Предполагается, что выборки извлечены из нормальных совокупностей с одинаковыми дисперсиями.

Номер испытания	Уровни фактора A		
	A_1	A_2	A_3
1	11	12	2
2	12	14	4
3	16	16	10
4	17	18	12
$\overline{x_{гр}}$	14	15	7

2. Исследовалось влияние различных режимов питания (фактор A) на увеличение веса экспериментальных животных (кг). Требуется проверить влияние фактора A на вес животных. Считать, что выборка взята из генеральных совокупностей с нормальным законом распределения и одинаковыми дисперсиями.

Количество животных	Уровни фактора A			
	A_1	A_2	A_3	A_4
1	2,4	1,6	2,0	2,4
2	2,5	2,1	1,6	2,2
3	2,1	1,9	1,8	–
4	2,6	1,7	–	–
5	–	1,7	–	–
$\overline{x_{гр}}$	2,4	1,8	1,8	2,6

3. У больных острым инфарктом миокарда в первый месяц лечения наряду с общепринятым лечением назначали ежедневный прием аспирина в разных дозировках. При этом оценивали снижение относительного риска смерти через 30 дней от начала лечения острого инфаркта миокарда. Влияет ли на эффективность лечения острого инфаркта миокарда назначение различных доз аспирина?

Номер испытания	Суточная дозировка аспирина, мг/сут				
	75	160	325	500	1500
1	5	21	22	14	15
2	9	24	33	17	21
3	14	26	24	27	24
4	17	31	26	21	28
5	18	33	29	22	26
6	16	22	31	25	20

4. В исследовании изучали изменение вязкости крови больных стенокардией II и III функционального класса под влиянием электромагнитного излучения КВЧ-диапазона на частоте молекулярного спектра излучения и поглощения атмосферного кислорода с различной продолжительностью периода облучения образца крови. Влияет ли продолжительность облучения на вязкость крови?

Номер испытания	Продолжительность облучения крови, мин			
	0-15	15-30	30-60	60-80
1	5,4	4,6	3,5	3,0
2	5,0	4,4	3,7	3,1
3	4,5	4,0	4,0	3,2
4	5,1	4,3	3,4	3,4
5	4,7	4,2	3,0	3,3
6	4,9	4,6	3,3	3,1

5. При обострениях хронической обструктивной болезни легких используют лекарственный препарата будесонид. В таблице представлены значения парциального давления углекислого газа крови ($PaCO_2$, мм. рт. ст.) в зависимости от длительности терапии. Влияет ли продолжительность лечения будесонидом на парциальное давление углекислого газа крови?

Номер испытания	Продолжительность лечения, дни			
	2	4	7	10
1	44,2	43,7	41,6	40,1
2	43,9	43,1	42,0	40,7
3	44,1	43,5	41,5	40,4
4	44,0	43,9	41,9	40,9
5	43,8	43,0	41,2	41,0

6. У больных острым инфарктом миокарда в различные дни от начала заболевания определяли количество эритроцитов ($\cdot 10^{12}$/л). В таблице представлены значения эритроцитов в различные сроки от начала острого инфаркта миокарда. Влияет ли продолжительность заболевания на содержание эритроцитов в крови?

Номер испытания	Продолжительность заболевания, дни		
	1	7	21
1	4,2	5,2	4,2
2	4,1	5,3	4,4
3	4,8	5,0	4,7
4	4,5	4,9	4,9
5	4,0	5,1	4,6
6	4,5	4,8	4,1

7. У испытуемых было изучено потребление кислорода при различной физической активности. Влияет ли уровень физической активности на потребление кислорода?

Номер испытания	Ходьба (км/ч)			
	1,5	3	5	6,5
1	2,5	3,1	4,9	5,8
2	2,4	3,3	5,4	6,0
3	2,7	2,9	5,2	5,7
4	2,2	3,0	5,7	5,4
5	2,6	2,9	5,3	5,1

8. В таблице отражены показатели фракции выброса левого желудочка у больных с хронической недостаточностью кровообращения различных функциональных классов. Определите, влияет ли функциональный класс недостаточности кровообращения на сократительную способность левого желудочка?

Номер испытания	Функциональный класс СН			
	I	II	III	IV
1	0,47	0,48	0,33	0,23
2	0,45	0,43	0,32	0,21
3	0,41	0,41	0,34	0,20
4	0,40	0,42	0,30	0,24
5	0,43	0,41	0,35	0,25

9. В таблице отражены показатели индекса массы миокарда левого желудочка (г/м^2) у больных с хронической недостаточностью кровообращения различных функциональных классов. Определите, влияет ли функциональный класс недостаточности кровообращения на массу левого желудочка?

Номер испытания	Функциональный класс СН			
	I	II	III	IV
1	140	138	190	250
2	141	139	187	252
3	142	142	192	255
4	145	140	189	254
5	141	143	191	247

10. Проверьте эффективность влияния оликарда на количество приступов стенокардии в сутки после курсового лечения пациентов с ранней постинфарктной стенокардией.

Номер испытания	Доза оликарда		
	40 мг/сут	60 мг/сут	80 мг/сут
1	2	3	1
2	1	4	1
3	3	2	2
4	5	1	1
5	2	5	3
6	1	5	1

11. Проверьте, влияет ли дозировка пикамилона на частоту сокращений сердца.

Номер испытания	Суточная доза пикамилона, г		
	0,1	0,2	0,3
1	84	71	73
2	81	77	78
3	80	80	81
4	79	81	83
5	78	83	85
6	72	84	72

12. Проверьте, влияет ли уровень диастолического артериального давления на относительный риск развития ишемической болезни сердца.

Номер испытания	Диастолическое АД, мм рт. ст.			
	70	80	90	100
1	0,5	1,2	1,7	2,4
2	0,4	1,1	1,6	2,3
3	0,3	1,3	1,8	2,5
4	0,5	1,2	1,6	2,4
5	0,6	1,1	1,7	2,6

13. Проверьте, влияет ли уровень холестерина в крови на смертность от ишемической болезни сердца в различных регионах страны.

Регионы	Сывороточный холестерин, ммоль/л			
	4	5	6	7
1	9	12	17	28
2	8	13	16	27
3	9	13	18	27
4	7	14	17	26
5	8	14	17	29

14. Оцените эффективность влияния небиволола на максимальную скорость кровотока в плечевой артерии (в м/с) через 6 мес лечения у пациентов с сердечной недостаточностью.

Номер испытания	Доза небиволола		
	1,25 мг/сут	2,5 мг/сут	5 мг/сут
1	0,34	0,54	0,61
2	0,32	0,53	0,63
3	0,33	0,55	0,64
4	0,35	0,56	0,62
5	0,34	0,54	0,63
6	0,32	0,53	0,66

15. Проверьте, влияет ли степень тяжести хронической обструктивной болезни легких на объем форсированного выдоха за 1 сек (в% от должного).

Номер испытания	Степень тяжести заболевания		
	Легкая	Средняя	Тяжелая
1	70	61	45
2	75	56	49
3	74	62	50
4	80	60	45
5	72	53	47
6	76	52	42

16. Оценить влияние мощности и продолжительности нагрузки на велоэргометре на частоту сердечных сокращений. Данные взяты из совокупностей с нормальным законом распределения и одинаковыми дисперсиями.

Мощность, Вт	Частота сердечных сокращений (уд/мин)			
	Продолжительность нагрузки			
	B_1=200	B_2=300	B_3=400	B_4=500
A_1=40	98	105	125	132
	93	99	121	144
	103	111	129	156
A_2=70	110	101	123	142
	96	111	131	147
	103	121	139	152
A_3=100	106	107	130	153
	108	117	134	141
	110	127	138	165

17. У мужчин различного возраста при различных величинах отношения общего холестерина к холестерину липопротеидов высокой плотности (ХЛ/ХЛ ЛПВП) было зарегистрировано систолическое АД (мм рт. ст.). Влияют ли возраст и липидный состав крови на величину систолического АД?

Уровни хл/хл лпвп	Возраст, годы			
	40	50	60	70
4	140	150	147	162
	139	152	146	160
	137	151	149	163
5	145	153	153	168
	146	152	154	167
	148	155	152	170
6	155	162	161	175
	154	161	162	174
	156	164	160	177
7	152	160	172	184
	153	161	170	183
	155	162	175	186
8	161	168	175	190
	162	167	173	191
	160	166	174	193

18. Проверьте, влияют ли пол и возраст на частоту госпитализации пациентов с диагнозом хроническая обструктивная болезнь легких. В таблице указаны показатели госпитализации по поводу хронической обструктивной болезни легких на 100 000 населения.

Пол	Возраст, годы					
	30	40	50	60	70	80
Мужской	1	2	5	25	61	90
	1	1	2	24	60	89
	2	2	3	26	59	86
	1	3	4	23	56	87
Женский	1	2	4	21	40	39
	1	1	2	20	41	40
	2	2	3	19	39	42
	1	1	2	22	37	40

19. Проверьте, влияют ли пол и возраст на смертность пациентов от хронической обструктивной болезни легких. В таблице указаны по-

казатели смертности от хронической обструктивной болезни легких на 100 000 населения.

Пол	Возраст, годы					
	30	40	50	60	70	80
Мужской	0	1	1	4	16	34
	0	1	1	3	15	35
	0	0	0	4	17	37
	1	0	1	2	16	34
Женский	0	0	1	3	14	27
	0	0	0	1	13	26
	0	0	0	2	12	24
	0	0	0	2	14	28

ГЛАВА XI
АНАЛИЗ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

§ 11.1. Виды временных рядов и их характеристики

Временны́м рядом называют множество результатов наблюдений изучаемого процесса, проводимых последовательно во времени. Отдельные наблюдения называют **значениями** или **уровнями временного ряда**. Значения временного ряда обозначаются: $x(t_1)$, $x(t_2)$, …, $x(t_n)$.

По характеру проявления временные ряды делятся на непрерывные и дискретные.

Непрерывным называют временной ряд, значение которого определены в любой произвольный момент времени. К непрерывным временным рядам относятся, например, запись электрокардиограммы, кривая, вычерчиваемая барографом, изменение скорости химической реакции в технологическом процессе и т. д.

К **дискретным** относят моментные и интервальные временные ряды.

Моментные дискретные временные ряды получают обычно путем определения значений временного ряда в заданные моменты времени. Например, измеряя в течение суток через каждый час температуру, при которой протекает химическая реакция, мы получим моментный временной ряд. Моментными будут также временные ряды, отражающие изменение численности врачей за несколько лет, количества пациентов, приходящихся на одну больницу, и т. п.

Интервальные дискретные временные ряды получают обычно путем усреднения показателей за определенные промежутки времени. Например, абсолютные значения показателей товарооборота аптеки формируются за некоторый период времени (месяц, квартал, год). Потребление медикаментов на душу населения также определяется как усредненное за некоторый период времени. Его изменения за несколько лет составляют интервальный временной ряд, который и используется в основном для описания работы аптечной сети.

Дискретные временные ряды легче подвергаются статистической обработке, поэтому непрерывные временные ряды обычно преобразуют в дискретные.

Временной ряд является **случайным**, если значения, которые он будет принимать, могут быть описаны с помощью плотности распределения вероятностей. Все рассмотренные ранее примеры относятся к случайным временным рядам.

Временной ряд называется **детерминированным**, если его значения в будущие моменты времени могут быть точно определены по известной функциональной зависимости. В чистом виде детерминированные временные ряды встречаются очень редко. Обычно временной ряд содержит несколько компонент:

$$x(t) = f(t) + s(t) + c(t) + \varepsilon(t).$$

С учетом особенностей анализа медико-биологических временных рядов эти составляющие могут включать:

$f(t)$ – **тренд** или долгосрочные изменения, отражающие длительно протекающие процессы (например, рост количества врачей на определенное количество населения, увеличение коечного фонда, увеличение или уменьшение количества больных, страдающих различными заболеваниями); временные рамки изменения этой составляющей измеряться столетиями или даже тысячелетиями;

$s(t)$ – **сезонная компонента**, отражаемая повторяемость изменения некоторых процессов в течение определенных периодов (года, месяца, недели, дня), например, количество больных гриппом в течение года, обострение аллергических заболеваний в весенний и летний периоды;

$c(t)$ – **циклическая компонента**, характеризует колебания некоторого показателя относительно среднего или нулевого значения. В качестве примера можно привести различные электрограммы: электрокардиограмма, электроэнцефалограмма, электромиограмма и т.д. Периодичность этих процессов очень мала: минуты, секунды, миллисекунды;

$\varepsilon(t)$ – **случайная компонента**, отражает влияние различных неучтенных или случайных факторов.

Временные ряды могут содержать одновременно все перечисленные компоненты или их различные комбинации. Поэтому анализ временного ряда направлен на выявление природы факторов, влияющих на показатели временного ряда, а также установления и изучения вклада каждого компонента в изменении временного ряда.

Основные задачи временных рядов:

– выделение и анализ основных составляющих временного ряда (тренда, сезонных, циклических и случайных компонентов);

– построение математических моделей временного ряда и проверка их адекватности;

– выявление связей между значениями одного или нескольких временных радов;

– прогнозирование изменения изучаемого процесса на основе его временного ряда.

Для решения каждой из этих задач используются различные методы анализа временных рядов. Эти методы различаются в зависимости от преобладания той или иной компоненты.

В общем случае временной ряд в каждый момент времени можно полностью описать как случайную величину функцией распределения или плотностью распределения вероятностей. Однако получение такого рода информации на практике связано с длительными исследованиями, поэтому широкого распространения оно не получило. Кроме того, такая полная информация часто и не нужна. Поэтому для описания временных рядов используют числовые характеристики**:** математическое ожидание, дисперсию и др. В общем случае эти характеристики зависят от времени, и поэтому их надо обозначать как функцию от времени: $M(x(t))$ – математическое ожидание; $D(x(t))$ – дисперсия временного ряда.

Если свойства временного ряда не изменяются во времени, т.е. математическое ожидание, дисперсия и другие характеристики остаются постоянными, такой ряд называется **стационарным**.

Характеристики стационарного временного ряда не зависят от времени, и поэтому их оценки можно находить путем усреднения по времени.

Укажем основные формулы, по которым можно вычислять характеристики стационарного временного ряда.

Оценку математического ожидания находят как среднее арифметическое значений временного ряда:

$$\bar{x}(t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i .$$

Оценка дисперсии

$$S_x^2(t) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}(t))^2 .$$

§ 11.2. Отыскание тренда временного ряда

Пусть имеется последовательность значений временного ряда:

x_i	x_1	x_2	x_3	…	x_n
t_i	t_1	t_2	t_3	…	t_n

Необходимо выявить основную тенденцию изменения ряда, на которую налагаются случайные отклонения. Эту задачу принято называть **задачей сглаживания временных рядов**. Основная тенденция изменения ряда, часто называемая **трендом**, проявляется как результат регулярного влияния большого числа факторов на изучаемый процесс.

В тех случаях, когда вид исследуемой зависимости тренда от времени известен и нужно вычислить ее параметры, широко применяется метод наименьших квадратов. Для линейной зависимости

$$\bar{x}(t_i) = a + b(t_i - \bar{t}),$$

где a, b – коэффициенты, которые надо вычислить; $\bar{t} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i$.

Согласно методу наименьших квадратов лучшими считаются такие значения коэффициентов a и b, при которых сумма квадратов отклонений эмпирических значений x_i от расчетных значений $\bar{x}(t_i)$ в формуле $\bar{x}(t_i) = a + b(t_i - \bar{t})$ окажется наименьшей.

Формула, описывающая тренд изучаемого процесса, должна быть достаточно проста и в то же время довольно точно отражать его изменения.

Наиболее часто применяются следующие зависимости:

– линейная $\bar{x}(t) = a + bt$;

– квадратическая $\bar{x}(t) = a + bt + ct^2$;

– экспоненциальная $\bar{x}(t) = a + be^{ct}$;

– гиперболическая $\bar{x}(t) = a + \frac{b}{t}$;

– логарифмическая $\bar{x}(t) = a\ln t + b$.

В частности, установлено, что изменение товарооборота аптекоуправления имеет вид экспоненциальной зависимости, основная тенденция потребления сульфаниламидных препаратов – линейной, стрептоцида, этазола, сульгина, уросульфана – квадратической.

Часто трудно сразу оценить вид возможной функциональной зависимости. В этом случае необходимо сравнить несколько наиболее вероятных зависимостей по какому-либо критерию.

Удобным критерием является оценка дисперсий отклонений, вычисляемая по формуле

$$S^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_i)^2 / (n - p - 1),$$

где x_i – фактические значения временного ряда; $\bar{x}_i$ – теоретически вычисленные по формуле значения; n – число значений временного ряда; p – число искомых параметров уравнения тренда.

Существуют и более сложные критерии, например остаточная дисперсия отклонений:

$$S_0^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_i)^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_i)\right)^2.$$

После вычисления коэффициентов уравнений тренда определяют значения либо дисперсии отклонения, либо остаточной дисперсии и выбирают то из них, для которого величина критерия меньше.

Рассмотрим случай, когда уравнение тренда имеет линейный вид

$$\bar{x}(t_i) = a + b(t_i - \bar{t}).$$

Коэффициенты a и b найдем по следующим формулам:

$$a = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i; \qquad b = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i t_i'}{\sum_{i=1}^{n} (t_i')^2},$$

где $t_i' = t_i - \bar{t}$; $\quad \bar{t} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i$.

Полученное таким образом уравнение соответствует переносу начала координат из точки $t = 0$ в точку $t = \bar{t}$.

Рассмотрим теперь уравнение второго порядка

$$\bar{x}(t) = a + bt + ct^2$$

Найдем коэффициенты a, b и c для этого уравнения.

Сумма квадратов отклонений вычисленных значений тренда от соответствующих значений временного ряда:

$$U = \sum_{i=1}^{n} (x_i - (a + bt_i + ct_i^2))^2.$$

Данное выражение имеет минимум при условии, что все его частные производные равны нулю:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial a} = -2\sum_{i=1}^{n} (x_i - (a + bt_i + ct_i^2)) = 0; \\ \dfrac{\partial U}{\partial b} = -2\sum_{i=1}^{n} (x_i - (a + bt_i + ct_i^2))t_i = 0; \\ \dfrac{\partial U}{\partial c} = -2\sum_{i=1}^{n} (x_i - (a + bt_i + ct_i^2))t_i^2 = 0. \end{cases}$$

Коэффициенты перед суммами не равны нулю. Раскрыв скобки, получим:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i - na - b\sum_{i=1}^{n} t_i - c\sum_{i=1}^{n} t_i^2 = 0; \\ \sum_{i=1}^{n} x_i t_i - a\sum_{i=1}^{n} t_i - b\sum_{i=1}^{n} t_i^2 - c\sum_{i=1}^{n} t_i^3 = 0; \\ \sum_{i=1}^{n} x_i t_i^2 - a\sum_{i=1}^{n} t_i^2 - b\sum_{i=1}^{n} t_i^3 - c\sum_{i=1}^{n} t_i^4 = 0. \end{cases}$$

Произведем замену t_i на $t_i' = t_i - \bar{t}$ (как и для линейного тренда), что соответствует переносу начала координат в точку $t = \bar{t}$. На основании свойств выборочной средней слагаемые, содержащие суммы t_i' в нечетных степенях, равны нулю:

$$\sum_{i=1}^{n} t_i' = 0; \qquad \sum_{i=1}^{n} t_i'^3 = 0.$$

Тогда система примет вид:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i - na - c\sum_{i=1}^{n} t_i'^2 = 0; \\ \sum_{i=1}^{n} x_i t_i' - b\sum_{i=1}^{n} t_i'^2 = 0; \\ \sum_{i=1}^{n} x_i t_i'^2 - a\sum_{i=1}^{n} t_i'^2 - c\sum_{i=1}^{n} t_i'^4 = 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы находим формулу для коэффициента *b*:

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i t_i'}{\sum_{i=1}^{n} (t_i')^2}.$$

Решив совместно первое и третье уравнения системы, получим:

$$c = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i (t_i')^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} (t_i')^2}{n\sum_{i=1}^{n} (t_i')^4 - \left(\sum_{i=1}^{n} (t_i')^2\right)^2}; \qquad a = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - c\sum_{i=1}^{n} (t_i')^2\right).$$

С учетом переноса начала координат получаем для тренда уравнение второго порядка

$$\bar{x}(t_i) = a + b(t_i - \bar{t}) + c(t_i - \bar{t})^2.$$

Пример 11.1. Таблица содержит сведения об оптовом товарообороте в аптеке по годам (млн. руб.).

Год	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
t	1	2	3	4	5	6	7	8
$x(t)$	13	20	28	31	36	41	48	47

Какое уравнение лучше описывает тренд временного ряда – линейное или квадратичное?

Решение.

Для вычисления коэффициентов линейного и квадратичного трендов определим промежуточные величины.

Оценку математического ожидания временного ряда найдем по формуле:

$$a_1 = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{264}{8} = 33.$$

Среднее значение аргумента:

$$\bar{t} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i = \frac{1+2+3+4+5+6+7+8}{8} = \frac{36}{8} = 4{,}5.$$

Для удобства осуществим перенос начала координат из точки $t = 0$ в точку $t = \bar{t}$, таким образом: $t_i' = t_i - \bar{t}$. Исходные данные и полученные значения занесем в таблицу:

Год	t_i	x_i	t_i'	$x_i t_i'$	$(t_i')^2$	$x_i(t_i')^2$	$(t_i')^4$
2002	1	13	-3,5	-45,5	12,25	159,25	150,06
2003	2	20	-2,5	-50	6,25	125	39,06
2004	3	28	-1,5	-42	2,25	63	5,06
2005	4	31	-0,5	-15,5	0,25	7,75	0,06
2006	5	36	0,5	18	0,25	9	0,06
2007	6	41	1,5	61,5	2,25	92,25	5,06
2008	7	48	2,5	120	6,25	300	39,06
2009	8	47	3,5	164,5	12,25	575,75	150,06
$\sum$	36	264	0	211	42	1332	388,5

Коэффициент b для линейного и квадратичного трендов:

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i t_i'}{\sum_{i=1}^{n} (t_i')^2} = \frac{211}{42} = 5{,}02.$$

Коэффициенты c и a_2 для квадратичного тренда:

$$c = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i (t_i')^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} (t_i')^2}{n\sum_{i=1}^{n} (t_i')^4 - \left(\sum_{i=1}^{n} (t_i')^2\right)^2} = \frac{8\cdot 1332 - 264\cdot 42}{8\cdot 388{,}5 - 42^2} = -0{,}32,$$

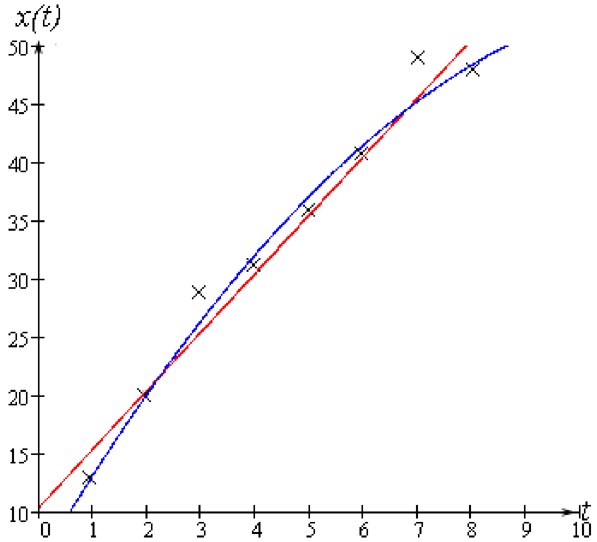
$$a_2 = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - c\sum_{i=1}^{n} (t_i')^2\right) = \frac{1}{8}(264 + 0{,}32\cdot 42) = 34{,}69.$$

Таким образом, уравнения для линейного и квадратичного трендов примут вид:

$$\overline{x}^{(1)} = 33 + 5{,}02(t_i - \bar{t}),$$

$$\overline{x}^{(2)} = 34{,}69 + 5{,}02(t_i - \bar{t}) - 0{,}32(t_i - \bar{t})^2.$$

Изобразим на координатной плоскости вместе с экспериментальными точками прямую и параболу, определяемые полученными уравнениями.



Для проверки адекватности полученных трендов исходным данным рассчитаем для каждого из них остаточную дисперсию по формуле:

$$S_0^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x_i}\right)^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x_i}\right)\right)^2.$$

Расчетные значения сведем в таблицы.

а) для линейного тренда:

x	13	20	28	31	36	41	48	47	$\sum$
$x - \overline{x_i}$	-2,4	-0,4	2,5	0,5	0,5	0,5	2,4	-3,6	0
$\left(x - \overline{x_i}\right)^2$	5,8	0,2	6,4	0,3	0,2	0,2	6,0	12,8	32,0

Остаточная дисперсия для линейного тренда:

$$S_{01}^2 = \frac{1}{8-1}\cdot 32 - \left(\frac{1}{8}\cdot 0\right)^2 = 4{,}57$$

б) для квадратичного тренда:

x	13	20	28	31	36	41	48	47	$\sum$
$x - \overline{x_i}$	-0,2	-0,1	1,6	-1,1	-1,1	-0,5	2,8	-1,3	0
$\left(x - \overline{x_i}\right)^2$	0,0	0,0	2,5	1,2	1,3	0,3	7,6	1,8	14,6

Остаточная дисперсия для квадратичного тренда:

$$S_{02}^2 = \frac{1}{8-1} \cdot 14{,}6 - \left(\frac{1}{8} \cdot 0\right)^2 = 2{,}09$$

Таким образом, так как $S_{02}^2 < S_{01}^2$, то можно сделать вывод, что квадратичное уравнение лучше описывает тренд исследуемого временного ряда.

§ 11.3. Сглаживание временных рядов: метод скользящего среднего, экспоненциальное сглаживание

Метод скользящего среднего

В практических задачах тренд может иметь сложный вид. Одним из возможных вариантов при этом является сглаживание временного ряда прямыми на достаточно коротких его отрезках. Например, по трем значениям x_1, x_2 и x_3 можно построить прямую, заданную уравнением $\overline{x}(t_i) = a + b(t_i - \overline{t})$, которая будет проходить через точку с координатами $\overline{t} = (t_1 + t_2 + t_3)/3$ и $\overline{x} = (x_1 + x_2 + x_3)/3$. Значение $\overline{x}$ естественно отнести к середине интервала, т.е. считать его сглаженным значением $\overline{x}_2$. Сглаженное значение $\overline{x}_3$ можно вычислить, найдя предварительно коэффициент b, но проще определить его как среднее арифметическое значений x_2, x_3 и x_4:

$$\overline{x}_3 = (x_2 + x_3 + x_4)/3.$$

Интервал сглаживания при этом сдвинется на одно значение аргумента временного ряда вправо. Так же можно найти $\overline{x}_4$, $\overline{x}_5$ и т.д. Интервал сглаживания при этом как бы «скользит» по временному ряду. Отсюда и название – **метод скользящего среднего**.

Метод скользящего среднего состоит в усреднении последовательности n значений и отнесении результата усреднения к середине интервала сглаживания, после чего интервал сдвигается на одно значение аргумента временного ряда вправо.

При нечетном числе отсчетов ($n = 2m+1$) в интервале сглаживания скользящее среднее:

$$\overline{x}_i = (x_{i-m} + x_{i-m+1} + \ldots + x_i + x_{i+m-1} + x_{i+m})/(2m+1).$$

Если число значений временного ряда в интервале сглаживания является четным, т.е. $n = 2m$, то скользящие средние располагаются в промежутках между соседними, средними по времени, значениями временного ряда:

$$\overline{x}_i = (0{,}5x_{i-m} + x_{i-m+1} + \ldots + x_i + \ldots + 0{,}5x_{i+m})/(2m).$$

При использовании метода скользящего среднего удобно выбирать нечетное число значений временного ряда в интервале сглаживания, так как в этом случае сглаженное значение будет соответствовать моментам времени t_i, в которые брались реальные значения x_i.

Ряд сглаженных значений имеет дисперсию в n раз меньшую, чем дисперсия значений исходного временного ряда. Поэтому сглаженный ряд более точно отражает характер тренда, он может быть представлен графически и использован для дальнейшей обработки.

Длину интервала сглаживания надо выбирать с учетом скорости изменения ряда и величины разброса значений. Если относительно отрезков прямых разброс небольшой, а скорость изменения тренда ряда велика, то можно сглаживать ряд по малому числу – трем-пяти соседним значениям. Если скорость изменения тренда мала, а разброс значений большой, то, не теряя информации об изменении тренда, можно усреднять по большому числу значений (7 – 9) временного ряда, что позволит уменьшить влияние случайной составляющей. Если велики и скорость изменения тренда, и разброс значений временного ряда, то надо проводить сглаживание несколько раз по небольшим интервалам (например, на первом этапе по трем отсчетам). Результаты первого сглаживания при этом принимаются за новый временной ряд, который можно сгладить в зависимости от его характера или по большому, или по малому интервалу сглаживания.

Рассмотрим, например, изменение товарооборота аптеки в расчете на душу населения (в рублях), приведенное в таблице.

Год	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
t	1	2	3	4	5	6	7	8
$x(t)$	33	35	37	42	45	51	51	54

Произведем сглаживание данного временного ряда по трем точкам.

Сглаженные значения:

$$\overline{x_2} = (x_1 + x_2 + x_3)/3 = (33 + 35 + 37)/3 = 35,$$
$$\overline{x_3} = (x_2 + x_3 + x_4)/3 = (35 + 37 + 42)/3 = 38,$$
$$\overline{x_4} = (x_3 + x_4 + x_5)/3 = (37 + 42 + 45)/3 = 41{,}33,$$
$$\overline{x_5} = (x_4 + x_5 + x_6)/3 = (42 + 45 + 51)/3 = 46,$$
$$\overline{x_6} = (x_5 + x_6 + x_7)/3 = (45 + 51 + 51)/3 = 49,$$
$$\overline{x_7} = (x_6 + x_7 + x_8)/3 = (51 + 51 + 54)/3 = 52.$$

Казалось бы, потеряны первое и последнее значения временного ряда. Однако $\bar{x}_1$ можно определить, зная x_0:

$$\bar{x}_1 = (x_0 + x_1 + x_2)/3$$

Для вычисления x_0 составим уравнение прямой тренда по значениям x_1, x_2 и x_3, затем путем обратной экстраполяции вычислим x_0. Определяем:

$$\bar{t} = (1 + 2 + 3)/3 = 2; \quad a = \bar{x} = (x_1 + x_2 + x_3)/3; \quad b = (x_3 - x_1)/2.$$

Уравнение тренда, составленное по первым трем значениям, имеет вид:

$$\bar{x}(t) = (x_1 + x_2 + x_3)/3 + (x_3 - x_1)(t - \bar{t})/2.$$

По данному уравнению найдем при $t = 0$ значение x_0, предыдущее по отношению к x_1:

$$\bar{x}_0 = (4x_1 + x_2 - 2x_3)/3.$$

Теперь вычисляем:

$$\bar{x}_1 = (\bar{x}_0 + x_1 + x_2)/3 = (7x_1 + 4x_2 - 2x_3)/9.$$

Эта формула справедлива и для последнего сглаженного значения, только порядок нумерации надо вести с конца.

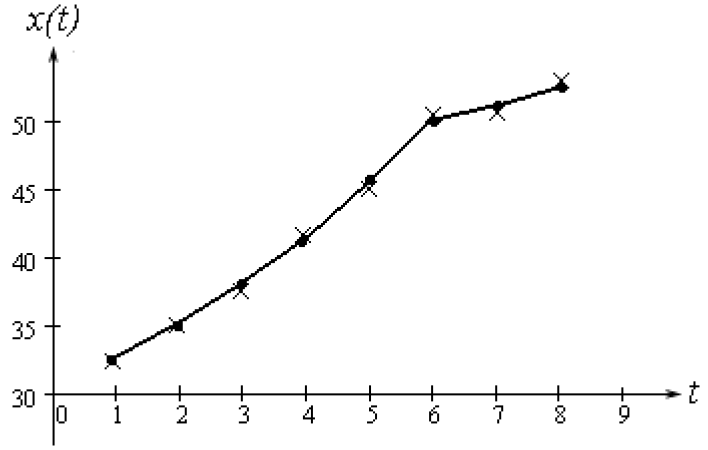
Так, для рассматриваемого примера:

$$\bar{x}_1 = (7x_1 + 4x_2 - 2x_3)/9 = (7 \cdot 33 + 4 \cdot 35 - 2 \cdot 37)/9 = 33,$$

$$\bar{x}_8 = (7x_8 + 4x_7 - 2x_6)/9 = (7 \cdot 54 + 4 \cdot 51 - 2 \cdot 51)/9 = 53{,}33.$$

Это сглаживание является сглаживанием первого порядка. Необходимо обратить внимание на то, что метод скользящего среднего соответствует сглаживанию отрезками прямых. Поэтому на графике соседние сглаженные по этому методу значения должны соединяться прямыми.

Построим временной ряд для нашего примера. Экспериментальные точки – указаны крестиками, сглаженные – соединены отрезками прямых.



Если сглаженные один раз значения сгладить еще раз, получится сглаживание второго порядка. При этом оказывается, что значения дискретного временного ряда берутся с различными весовыми коэффициентами.

Например, при сглаживании по трем отсчетам на первом этапе имеем:

$$\overline{x}_2^{(1)} = (x_1 + x_2 + x_3)/3; \qquad \overline{x}_3^{(1)} = (x_2 + x_3 + x_4)/3; \ \ldots$$

На втором этапе для сглаживания второго порядка находим:

$$\overline{x}_3^{(2)} = (\overline{x}_2^{(1)} + \overline{x}_3^{(1)} + \overline{x}_4^{(1)})/3; \qquad \overline{x}_4^{(2)} = (\overline{x}_3^{(1)} + \overline{x}_4^{(1)} + \overline{x}_5^{(1)})/3; \ \ldots$$

Вычислив хотя бы для первого сглаженного значения весовые коэффициенты, получим

$$\overline{x}_3^{(2)} = (x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5)/9 .$$

Отсюда ясно, что сглаживание второго порядка по трем значениям эквивалентно однократному сглаживанию по пяти отсчетам с весовыми коэффициентами 1/9, 2/9, 3/9, 2/9, 1/9. Сумма этих весовых множителей равна единице. Сглаживая исходный временной ряд несколько раз по трем или более значениям, получаем в результате не просто средние арифметические значения выравненных рядов, а взвешенные скользящие средние.

Хорошие результаты можно получить при сглаживании **методом взвешенного скользящего среднего** по большим интервалам, если проводить его отрезками кривых, например по параболе второго порядка. Весовые коэффициенты при этом определяются методом наименьших квадратов для центральных в интервале сглаживаемых значений $\overline{x}_i$. Расчеты показывают, что при сглаживании по пяти значениям участками параболы получают следующие весовые коэффициенты: –1/12, 4/12, 6/12, 4/12, –1/12.

В теории сглаживания доказывается, что сумма весовых коэффициентов при любом сглаживании равна единице. Это видно и из приведенных примеров.

Сглаживание можно проводить и участками какой-либо другой кривой. Например, нетрудно убедиться, что при четырехкратном сглаживании по скользящему среднему по двум значениям получается набор коэффициентов 1/16, 4/16, 6/16, 4/16, 1/16.

На разных участках тренд имеет различный аналитический вид и различную скорость изменения. Поэтому оптимального набора весовых коэффициентов не существует и часто наборы коэффициентов удобно выбирать из условия простоты расчетов.

Для ручных расчетов удобны наборы коэффициентов со знаменателем 10. Например, рекомендуется следующий набор:

0,1; 0,2; 0,4; 0,2; 0,1.

При этом первые сглаженные значения $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$ определяют по предшествующим значениям $\bar{x}_0$ и $\bar{x}_{-1}$, вычисленным путем обратной экстраполяции кривой, параметры которой находят методом наименьших квадратов по первым четырем значениям. Такой способ рассмотрен при вычислении крайних сглаженных значений по скользящим средним. Опустив сложные расчеты, приведем конечные формулы:

$$\bar{x}_1 = (7x_1 + 5x_2 - x_3 - x_4)/10; \qquad \bar{x}_2 = (3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4)/10.$$

Последние значения вычисляются по этим же формулам, только нумерация изменяется на обратную.

Метод экспоненциального сглаживания

Суть **метода экспоненциального сглаживания** заключается в сглаживании временного ряда по взвешенному скользящему среднему, причем для сглаживаемого значения ряда весовой коэффициент максимален. Он уменьшается по экспоненциальному закону для предыдущих значений по мере удаления в «прошлое». Следующие после сглаживаемого значения временного ряда при этом не учитываются.

Экспоненциальные средние вычисляются по рекуррентной формуле. При сглаживании первого порядка она имеет вид

$$\bar{x}_i^{(1)} = \alpha x_i + (1-\alpha)\bar{x}_{i-1}^{(1)},$$

где $\bar{x}_i^{(1)}$ – экспоненциальное среднее первого порядка для данного значения x_i временного ряда; α – параметр экспоненциального сглаживания; $\bar{x}_{i-1}^{(1)}$ – экспоненциальное среднее первого порядка, полученное на предыдущем шаге для значения x_{i-1} временного ряда.

При экспоненциальном сглаживании k-го порядка используется формула

$$\bar{x}_i^{(k)} = \alpha \bar{x}_i^{(k-1)} + (1-\alpha)\bar{x}_{i-1}^{(k)}.$$

Параметр α определяет степень различия между значениями временного ряда и соответствующими сглаженными значениями. Так, при α=1 сглаженные значения в точности повторяют значения временного ряда, а при уменьшении величины α сглаженные значения все больше отличаются от соответствующих значений временного ряда.

Методов выбора оптимальной величины параметра α не существует, однако в литературе отмечается связь между его величиной и длиной интервала сглаживания:

$$\alpha = \frac{2}{n+1}.$$

Длина интервала сглаживания при этом выбирается, исходя из тех соображений, что и при сглаживании по скользящему среднему или взвешенному скользящему среднему.

При сглаживании первого значения временного ряда необходимо знать предыдущее сглаженное значение, т. е. $\overline{x}_0^{(1)}$ или $\overline{x}_0^{(2)}$. Их величины можно вычислить, определив предварительно коэффициенты уравнения тренда (линейного или нелинейного), соответствующего значениям x_1, x_2, x_3, ..., аналогично тому, как это делается при использовании метода скользящего среднего и взвешенного скользящего среднего. В полученное уравнение тренда подставляется $t = 0$, и вычисляются соответствующие сглаженные значения. Такой способ требует довольно громоздких вычислений, а весовые коэффициенты этих значений временного ряда для последующих сглаженных значений довольно малы.

Рассмотрим временной ряд, характеризующий изменения размера заготовок лекарственного сырья (в центнерах) в аптеке по годам.

Исходные данные и результаты расчетов приведены в таблице 11.1.

Во втором столбце таблицы 11.1 указаны номера значений временного ряда, в третьем – значения временного ряда, в четвертом – сглаженные значения, полученные методом скользящего среднего, в пятом – сглаженные значения, полученные методом взвешенного скользящего среднего, в шестом – значения, полученные методом экспоненциального сглаживания первого порядка.

Для сравнения точности методов сглаживания при различных интервалах сглаживания для скользящего среднего и экспоненциального сглаживания взят интервал $n = 3$, а для взвешенного скользящего среднего $n = 5$. Поясним процесс расчета.

Таблица 11.1

Год	Номер значения временного ряда	x_i	$\overline{x}_{ск}$	$\overline{x}_{взв}$	$\overline{x}_{эксп}$
1	2	3	4	5	6
2002	1	10	12	12,2	10
2003	2	17	14	15,8	13,5
2004	3	15	16,7	16,3	14,25
2005	4	18	18,7	17,6	16,1
2005	5	23	20,7	21	19,6
2007	6	21	23	22,7	20,3
2008	7	25	25	25,6	22,4
2009	8	29	29	28,4	25,7

Для метода скользящего среднего:

$$\bar{x}_1 = (7 \cdot 10 + 4 \cdot 17 - 2 \cdot 15)/9 = 12;$$
$$\bar{x}_2 = (10 + 17 + 15)/3 = 14;$$
$$\bar{x}_3 = (17 + 15 + 18)/3 = 16{,}7;$$
$$\bar{x}_4 = (15 + 18 + 23)/3 = 18{,}7;$$
$$\bar{x}_5 = (18 + 23 + 21)/3 = 20{,}7;$$
$$\bar{x}_6 = (23 + 21 + 25)/3 = 23;$$
$$\bar{x}_7 = (21 + 25 + 29)/3 = 25;$$
$$\bar{x}_8 = (7 \cdot 29 + 4 \cdot 25 - 2 \cdot 21)/9 = 29.$$

Для метода взвешенного скользящего среднего:

$$\bar{x}_1 = (7 \cdot 10 + 5 \cdot 17 - 15 - 18)/10 = 12{,}2;$$
$$\bar{x}_2 = (3 \cdot 10 + 5 \cdot 17 + 15 + 18)/10 = 15{,}8;$$
$$\bar{x}_3 = (10 + 2 \cdot 17 + 4 \cdot 15 + 2 \cdot 18 + 23)/10 = 16{,}3;$$
$$\bar{x}_4 = (17 + 2 \cdot 15 + 4 \cdot 18 + 2 \cdot 23 + 21)/10 = 17{,}6;$$
$$\bar{x}_5 = (15 + 2 \cdot 18 + 4 \cdot 23 + 2 \cdot 21 + 25)/10 = 21;$$
$$\bar{x}_6 = (18 + 2 \cdot 23 + 4 \cdot 21 + 2 \cdot 25 + 29)/10 = 22{,}7$$
$$\bar{x}_7 = (3 \cdot 29 + 5 \cdot 25 + 21 + 23)/10 = 25{,}6$$
$$\bar{x}_8 = (7 \cdot 29 + 5 \cdot 25 - 21 - 23)/10 = 28{,}4$$

Для метода экспоненциального сглаживания:

$$\bar{x}_2^{(1)} = 0{,}5 \cdot 17 + 0{,}5 \cdot 10 = 13{,}5;$$
$$\bar{x}_3^{(1)} = 0{,}5 \cdot 15 + 0{,}5 \cdot 13{,}5 = 14{,}25;$$
$$\bar{x}_4^{(1)} = 0{,}5 \cdot 18 + 0{,}5 \cdot 14{,}25 = 16{,}1;$$
$$\bar{x}_5^{(1)} = 0{,}5 \cdot 23 + 0{,}5 \cdot 16{,}1 = 19{,}6;$$
$$\bar{x}_6^{(1)} = 0{,}5 \cdot 21 + 0{,}5 \cdot 19{,}6 = 20{,}3;$$
$$\bar{x}_7^{(1)} = 0{,}5 \cdot 25 + 0{,}5 \cdot 20{,}3 = 22{,}4;$$
$$\bar{x}_8^{(1)} = 0{,}5 \cdot 29 + 0{,}5 \cdot 22{,}4 = 25{,}7.$$

§ 11.4. Прогнозирование временных рядов

Задачу прогнозирования в общем виде можно описать следующим образом: имеются экспериментально полученные значения временных рядов x_1, x_2, …, x_n; необходимо составить по этим данным математическую модель и вычислить ожидаемое значение временного ряда $\bar{x}_{n+k}$ в момент времени t_{n+k}.

Прогнозирование является статистической задачей и может осуществляться путем экстраполяции сформировавшейся к настоящему моменту времени тенденции в будущее.

Для решения этой задачи наиболее часто применяются методы наименьших квадратов и экспоненциального сглаживания, которые довольно просты, наглядны и учитывают различные факторы, влияющие на изменение тенденции временного ряда.

Для прогнозирования составляют математическую модель тренда по имеющимся значениям временного ряда и рассчитывают его возможные значения в будущие моменты времени. Прогнозирование по методу наименьших квадратов осуществляется обычно по линейной, квадратической и другим полиномиальным моделям.

Если тренд временного ряда описывается уравнением порядка p**,** то, согласно теореме Брауна – Майера, коэффициенты a_0, a_1, …, a_p можно выразить через экспоненциальные средние до (p+1)-го порядка включительно. Опустив сложные промежуточные выкладки, приведем формулы, связывающие экспоненциальные средние с коэффициентами полиномиального уравнения.

Для линейной модели

$$\bar{x}(t+\Delta t) = a_0 + a_1 \Delta t$$

оценки коэффициентов определяются формулами:

$$a_0 = 2\bar{x}^{(1)}(t) - \bar{x}^{(2)}(t); \qquad a_1 = \frac{\alpha}{1-\alpha}(\bar{x}^{(1)}(t) - \bar{x}^{(2)}(t)).$$

Для квадратической зависимости вида

$$\bar{x}(t+\Delta t) = a_0 + a_1 \Delta t + \frac{a_2 \Delta t^2}{2}$$

оценки коэффициентов определяются формулами:

$$\begin{cases} a_0 = 3(\bar{x}^{(1)}(t) - \bar{x}^{(2)}(t)) + \bar{x}^{(3)}(t); \\ a_1 = \dfrac{\alpha}{2(1-\alpha)^2}((6-5\alpha)\bar{x}^{(1)}(t) - 2(5-4\alpha)\bar{x}^{(2)}(t) + (4-3\alpha)\bar{x}^{(3)}(t)); \\ a_2 = \dfrac{\alpha}{(1-\alpha)^2}(\bar{x}^{(1)}(t) - 2\bar{x}^{(2)}(t) + \bar{x}^{(3)}(t)). \end{cases}$$

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется временным рядом?
2. Дайте определение уровням временного ряда.
3. На какие виды делятся временные ряды по характеру проявления?

4. Что представляет собой непрерывный временной ряд, дискретный временной ряд? Приведите примеры.
5. Что такое моментальный дискретный временной ряд? Приведите примеры.
6. Что такое интервальный дискретный временной ряд? Приведите примеры.
7. В каком случае временной ряд называется случайным?
8. Что такое детерминированный временной ряд?
9. Перечислите основные компоненты временного ряда?
10. Что такое тренд, сезонная компонента, циклическая компонента, случайная компонента?
11. Перечислите основные задачи временных рядов.
12. Перечислите числовые характеристики, которыми можно описать временной ряд.
13. В каком случае временной ряд называется стационарным?
14. Как найти оценку математического ожидания, оценку дисперсии для временного ряда? Запишите соответствующую формулу.
15. В чём заключается задача сглаживания временных рядов?
16. В каком случае для временных рядов, применяется метод наименьших квадратов?
17. Какими формулами пользуются для описания тренда временного ряда?
18. С помощью какой формулы можно вычислить оценку дисперсий отклонений?
19. В чем заключается метод скользящего среднего? метод взвешенного скользящего среднего? метода экспоненциального сглаживания?
20. В чем заключается прогнозирование временных рядов.

Задания для решения

1. Количество больных гриппом, зарегистрированных на участке в первые две недели января, приведены в таблице

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
X	5	10	8	11	12	7	14	15	10	18	20	15

Выделить тренд методом скользящего среднего и построить график.

2. Динамика содержания белка в моче (в г/сут) у больной системной красной волчанкой в процессе лечения преднизолоном и циклофосфаном.

t	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014
X	15	4,5	1	5,5	4	1,5	1	3,5	6	2,2

Предполагая нормальность распределения значений временного ряда, провести следующий анализ:

1) выявить наличие тренда с помощью критерия Стьюдента;

2) провести сглаживание временного ряда по трем точкам и построить график;

3) определить вид зависимости, которая описывает тренд временного ряда и построить график.

3. Первичная заболеваемость стенокардией на 100 тыс. населения России приведена в таблице:

t	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014
X	45	51	53	54	55	60	85	90	95	100

Предполагая нормальность распределения значений временного ряда, провести следующий анализ:

1) выявить наличие тренда с помощью критерия Стьюдента;

2) провести сглаживание временного ряда по трем точкам и построить график;

3) определить вид зависимости, которая описывает тренд временного ряда и построить график.

4. Первичная заболеваемость острым инфарктом миокарда на 100 тыс. населения России приведена в таблице:

t	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014
X	80	112	90	92	95	99	130	135	139	150

Предполагая нормальность распределения значений временного ряда, провести следующий анализ:

1) выявить наличие тренда с помощью критерия Стьюдента;

2) провести сглаживание временного ряда по трем точкам и построить график;

3) определить вид зависимости, которая описывает тренд временного ряда и построить график.

5. Изменение летальности от ИБС при ограничении потребления насыщенных жиров на 100 тыс. человек (мужчины 36-64 лет, Финляндия) приведено в таблице:

t	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014
X	700	650	550	510	480	400	390	330	310	300

Предполагая нормальность распределения значений временного ряда, провести следующий анализ:

1) выявить наличие тренда с помощью критерия Стьюдента;

2) провести сглаживание временного ряда по трем точкам и построить график;

3) определить вид зависимости, которая описывает тренд временного ряда и построить график.

6. Изменение летальности от ИБС при ограничении потребления насыщенных жиров на 100 тыс. человек (женщины 36-64 лет, Финляндия), приведено в таблице:

t	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014
X	150	120	100	90	80	55	45	42	40	35

Предполагая нормальность распределения значений временного ряда, провести следующий анализ:

1) выявить наличие тренда с помощью критерия Стьюдента;

2) провести сглаживание временного ряда по трем точкам и построить график;

3) определить вид зависимости, которая описывает тренд временного ряда и построить график.

7. Изменение диастолического артериального давления (мм. рт. ст.) при ограничении потребления насыщенных жиров (мужчины 36-64 лет, Финляндия) приведено в таблице:

t	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014
X	92	90	87	86	86	85	85	84	82	82

Предполагая нормальность распределения значений временного ряда, провести следующий анализ:

1) выявить наличие тренда с помощью критерия Стьюдента;

2) провести сглаживание временного ряда по трем точкам и построить график;

3) определить вид зависимости, которая описывает тренд временного ряда и построить график.

8. Изменение суммарного балла по шкале тревоги Гамильтона в процессе 6-недельной терапии пароксетином у больных с паническими расстройствами, приведено в таблице:

Дни	1	7	14	21	28	35	42	56	70	100
Суммарный балл	26	24	19	15	13	10	9	8	9	7

Предполагая нормальность распределения значений временного ряда, провести следующий анализ:

1) выявить наличие тренда с помощью критерия Стьюдента;

2) провести сглаживание временного ряда по трем точкам и построить график;

3) определить вид зависимости, которая описывает тренд временного ряда и построить график.

9. Артериальное давление у больных артериальной гипертензией, получавших плацебо, приведено в таблице:

Время после приема (часы)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
АД, мм рт. ст.	172	178	178	176	178	185	189	191	193	182

Предполагая нормальность распределения значений временного ряда, провести следующий анализ:

1) выявить наличие тренда с помощью критерия Стьюдента;

2) провести сглаживание временного ряда по трем точкам и построить график;

3) определить вид зависимости, которая описывает тренд временного ряда и построить график.

10. Артериальное давление у больных артериальной гипертензией, получавших престариум, приведено в таблице:

Время после приема (часы)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
АД, мм рт. ст.	172	161	159	155	152	160	163	166	173	173

Предполагая нормальность распределения значений временного ряда, провести следующий анализ:

1) выявить наличие тренда с помощью критерия Стьюдента;

2) провести сглаживание временного ряда по трем точкам и построить график;

3) определить вид зависимости, которая описывает тренд временного ряда и построить график.

ЧАСТЬ IV
МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ И УПРАВЛЕНИЯ В ФАРМАЦИИ

ГЛАВА XII
ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

§ 12.1. Задачи линейного программирования

Математические методы оптимизации применяются при исследовании и решении задач распределения ресурсов, планирования производства запасов и перевозок медикаментов, организации медицинского обслуживания населения, снабжения его лекарственными препаратами и т.д. Суть их заключается в том, что из множества возможных вариантов необходимо выбрать оптимальный. Для решения задач оптимизации разработан ряд методов: градиентный, линейного, нелинейного и динамического программирования, ветвей и границ, сетевого планирования и др.

Во многих случаях решение задачи оптимизации сводится к отысканию максимума или минимума некоторой функции (например, определение минимальной дозы лекарственного препарата для достижения нужного лечебного эффекта, получение максимальной массы лекарственного препарата из имеющегося сырья и т. п.).

Рассмотрим несколько примеров.

Составление химической смеси

Необходимо составить смесь, содержащую химические вещества A, B, D, которые находятся в исходном сырье двух видов в следующих концентрациях: A_1, A_2, B_1 , B_2 , D_1 , D_2. Стоимость единицы сырья первого виды – c_1 , второго – c_2. При этом вещества A в смеси должно быть не меньше b_A , вещества B – не меньше b_B , а вещества D – не меньше b_D ; стоимость смеси должна быть минимальной.

Ограничения на количественный состав каждого вещества будут иметь вид неравенств. Масса вещества A из первого вида сырья определяется массой x_1 этого сырья и концентрацией A_1, поэтому сырьё первого вида даёт в смесь $A_1 x_1$ единиц вещества A. Аналогично сырьё второго вида даёт $A_2 x_2$ единиц этого вещества; их суммарная масса не должна быть меньше b_A , т.е.

$$x_1 A_1 + x_2 A_2 \ge b_A.$$

Для вещества B и D аналогичные ограничения будут иметь вид:

$$x_1 B_1 + x_2 B_2 \ge b_B,$$
$$x_1 D_1 + x_2 D_2 \ge b_D.$$

Общая стоимость сырья равна сумме стоимостей сырья первого и второго вида: $c_1x_1 + c_2x_2$. Очевидно, что количество сырья каждого вида не может быть отрицательным, т.е. $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

Таким образом, математически эта задача записывается в виде системы линейных неравенств:

$$\begin{cases} A_1x_1 + A_2x_2 \geq b_A \\ B_1x_1 + B_2x_2 \geq b_B \\ D_1x_1 + D_2x_2 \geq b_D \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

При этом значение функции

$$L = c_1x_1 + c_2x_2$$

должно быть минимальным.

Функцию $L = c_1x_1 + c_2x_2$ принято называть **целевой функцией**. Как видно, целевая функция и левые части неравенства являются линейными функциями относительно переменных x_1 и x_2, и ограничения имеют вид неравенств.

Составление рациона

При составлении рациона питания необходимо учитывать калорийность, содержание белков, жиров, углеводов и т.д. Для простоты ограничимся случаем, когда имеются три продукта питания, каждый из которых имеет свою стоимость и содержит определенное количество питательных веществ *A*, *B*, *C*. Необходимо составить рацион питания так, чтобы стоимость его была минимальной. Количество единиц продуктов обозначим x_1, x_2, x_3, а стоимость единицы продукта – соответственно c_1, c_2, c_3. В рацион должно входить не менее b_1 единиц вещества *A*, не менее b_2 единиц вещества *B* и не менее b_3 единиц вещества *C*. Концентрация a_{ij} питательных веществ в единице продукта задается таблицей 12.1:

Таблица 12.1

Продукт	Питательное вещество			Стоимость
	A	*B*	*C*	
1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	c_1
2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	c_2
3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	c_3

Стоимость рациона равна сумме стоимостей использованных продуктов:

$$L = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3.$$

Ограничения на количественный состав рациона запишем в следующем виде:

$$a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3 \ge b_1$$
$$a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3 \ge b_2$$
$$a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 \ge b_3.$$

При этом надо иметь в виду, что по смыслу задачи количества веществ x_1, x_2, x_3 должны быть неотрицательными. Здесь, как и в предыдущей задаче, ограничения и целевая функция являются линейными функциями относительно переменных x_1, x_2, x_3.

Распределение и поставка медикаментов по аптекам

Пусть имеются две аптеки, в каждой из которых требуется некоторый препарат X соответственно в количествах b_1 и b_2. Этот препарат производится на трёх фармацевтических заводах, возможности поставок которых a_1, a_2, a_3. Суммарная потребность аптек равна сумме возможных поставок, т.е. $b_1 + b_2 = a_1 + a_2 + a_3$.

Стоимости c_{ij} поставок некоторого количества препарата из пунктов производства A_i в пункты потребления B_i различны. Необходимо так организовать поставки, чтобы их суммарная стоимость была минимальной. В этом случае ограничения на объём поставок для каждого завода будут иметь вид:

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = b_1; \qquad x_{12} + x_{22} + x_{32} = b_2,$$

где x_{11}, x_{21}, x_{31} – поставки в первую аптеку; x_{12}, x_{22}, x_{32} – поставки во вторую аптеку.

Общая стоимость поставок равна сумме стоимостей поставок с каждого завода в каждую аптеку:

$$L = c_{11}x_{11} + c_{21}x_{21} + c_{12}x_{12} + c_{22}x_{22} + c_{31}x_{31} + c_{32}x_{32}.$$

Кроме того, необходимо учесть, что заводы могут поставить только a_1, a_2, a_3 медикаментов:

$$a_1 = x_{11} + x_{12}; \quad a_2 = x_{21} + x_{22}; \quad a_3 = x_{31} + x_{32}.$$

При этом, естественно, обратных перевозок не может быть, т.е. все перевозки должны быть неотрицательными ($x_{ij} \ge 0$).

Таким образом, имеется пять уравнений с шестью неизвестными:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} = a_1; \\ x_{21} + x_{22} = a_2; \\ x_{31} + x_{32} = a_3; \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = b_1; \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = b_2 \end{cases}$$

и с ограничениями $x_{ij} \ge 0$.

Целевая функция при заданных условиях должна быть минимальной.

Рассмотренная задача известна под названием **транспортной задачи линейного программирования.** Отметим, что система уравнений и целевая функция являются линейными функциями своих переменных.

Мы рассмотрели два типа задач линейного программирования, причём они сходны между собой, и различие заключается только в том, что в одном случае ограничения носят характер неравенств, в другом – равенств. Как будет показано ниже, переход от неравенств к равенствам и обратно легко осуществим.

Для того чтобы решить основную задачу линейного программирования, надо свести её к стандартной (или канонической) форме, т.е. найти неотрицательные значения переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, которые удовлетворяют уравнениям

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

и обращают в минимум целефую функцию:

$$L = c_0 + c_1x_1 + \ldots + c_nx_n.$$

Если необходимо найти максимальное значение целевой функции, достаточно изменить её знак, т.е. ввести функцию

$$L' = -L = -c_1x_1 - c_2x_2 - \ldots - c_nx_n$$

и найти $\min L' = \min(-L) = \max L$.

Довольно часто ограничения имеют вид неравенств. Тогда от неравенств вида

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \ge b_i \quad \text{или} \quad a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \le b_i.$$

путём введения добавочных переменных x_{n+i} переходят к равенствам типа

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n - x_{n+i} = b_i$$

или

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n + x_{n+i} = b_i.$$

При этом число переменных увеличивается, однако в целевую функцию они входят с нулевым коэффициентами, поэтому суть задачи не меняется.

Особенностью задач линейного программирования является то, что число уравнений меньше числа неизвестных переменных, т.е. $m > n$. Способы решения таких систем изучаются в алгебре. Если число уравнений меньше числа неизвестных переменных, система имеет множество возможных решений, из которых надо выбрать одно, удовлетворяющее условию минимизации $L = c_0 + c_1 x_1 + ... + c_n x_n$ и условию неотрицательности переменных.

Чтобы найти одно из возможных решений, можно $n - m$ переменных приравнять к нулю, и тогда получится система из m уравнений с m неизвестными, которая решается обычными алгебраическими методами. Если такое решение существует, его называют **базисным**, а соответствующий ему набор переменных – **базисом** или **базисными переменными**. Остальные переменные называют **свободными**.

Очевидно, что базисных решений может быть много и часть из них содержит отрицательные значения переменных, а это противоречит постановке задачи. Поэтому допустимыми базисными решениями будут только те, которые содержат наборы неотрицательных переменных x_i.

§ 12.2. Графическое решение задач оптимизации в случае целевой функции двух аргументов

Рассмотрим случай, когда свободных переменных только две, т.е. $n - m = 2$. Выразим m базисных переменных через свободные, решив систему ограничений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1; \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Пусть, например, заданы система ограничений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 10 = 0; \\ x_1 - 0{,}5x_2 - x_4 + 1 = 0; \\ -0{,}5x_1 + x_2 - x_5 + 1 = 0 \end{cases}$$

и целевая функция $L = x_1 - x_2$.

Требуется найти значения $x_i \ge 0$, удовлетворяющие последней системе и превращающие в минимум целевую функцию $L = x_1 - x_2$.

В нашем случае имеется 5 переменных и 3 уравнения, поэтому $n - m = 2$ переменных можно принять в качестве свободных, выразив через них базисные переменные.

Возьмем в качестве свободных переменных x_1 и x_2. Тогда для x_3, x_4, x_5 получим:

$$\begin{cases} x_3 = 10 - x_1 - x_2; \\ x_4 = 1 + x_1 - 0{,}5x_2; \\ x_5 = 1 - 0{,}5x_1 + x_2. \end{cases}$$

Каждая переменная в данной системе может принимать только неотрицательные значения. Геометрически это соответствует некоторой полуплоскости в системе координат x_1Ox_2.

Например, условие $x_1 \geq 0$ соответствует верхней полуплоскости, условие $x_2 \geq 0$ – правой, условие $x_3 \geq 0$ – полуплоскости, расположенной ниже прямой $x_3 = 10 - x_1 - x_2 = 0$

Действительно, при $x_1 = x_2 = 0$ получим $x_3 = 10$, следовательно, начало координат лежит в полуплоскости, соответствующей положительным значениям переменной x_3.

Построив далее прямые, соответствующие $x_4 = 0$, $x_5 = 0$, получим область, в которой все переменные неотрицательны, т.е. область допустимых решений (ОДР) (на рис. 12.1 она заштрихована). Многоугольник, соответствующий области допустимых решений, является выпуклым, поскольку представляет собой пересечение выпуклых областей, определяемых условиями $x_i \geq 0$.

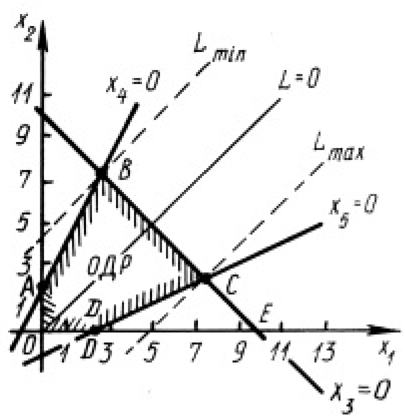


Рис. 12.1

В точках пересечения прямых $x_i = 0$ выполняется следующее условие: $n - m = 2$ переменные равны нулю, остальные $m = 3$ переменные при этом образуют базисное решение.

Итак, точки пересечения прямых $x_i = 0$, т.е. вершины многоугольника *OABCD*, соответствуют базисным решениям задачи линейного программирования. Однако допустимыми являются не все базисные решения, а только те, которые принадлежат области допустимых решений.

Например, точка E соответствует базисному решению $x_1 = 10$, $x_2 = 0$, $x_4 = 22$, $x_5 = -9$, $x_3 = 0$, которое не является допустимым, так как переменная x_5 отрицательна.

Поскольку оптимальное решение следует искать среди допустимых базисных, то ему будет соответствовать одна из вершин многоугольника *OABCD*. Вычислив значение целевой функции для каждой из вершин, т.е. точек пересечения прямых $x_i = 0$, определим вершину, соответствующую оптимальному решению.

Геометрическую интерпретацию оптимального решения можно представить следующим образом. Построим прямую, соответствующую случаю, когда целевая функция равна нулю, т.е. $L = x_1 - x_2 = 0$. По одну сторону от этой прямой лежит область значений x_1 и x_2, для которых целевая функция отрицательна, по другую сторону от прямой она положительна. В данном случае нас интересует минимальное значение целевой функции.

Если прямую, графически представляющую целевую функцию, передвигать вверх параллельно самой себе, что соответствует увеличению x_2, то значение целевой функции уменьшается и будет минимальным в крайней точке ОДР, в данном случае в вершине *B*. Координаты этой точки найдем, решив совместно уравнения $x_3 = 0$ и $x_4 = 0$. Получим: $x_1 = \frac{8}{3}$, $x_2 = \frac{22}{3}$, $x_5 = 7$. При этом значение целевой функции $L_{\min} = -\frac{14}{3}$.

Если прямую, графически представляющую целевую функцию, передвигать вниз параллельно самой себе, что в данном случае соответствует уменьшению x_2, то значение целевой функции увеличивается и будет максимальным в вершине *C*. Координаты этой точки найдем, решив совместно уравнения $x_3 = 0$ и $x_5 = 0$. Получим: $x_1 = \frac{22}{3}$, $x_2 = \frac{8}{3}$ и $L_{\max} = \frac{14}{3}$. Но точки *B* и *C* соответствуют допустимым базисным решениям. Следовательно, оптимальное решение задачи линейного программирования находится только среди допустимых базисных решений. Этот вывод является общим и при $n - m > 2$ и подсказывает путь решения задачи линейного программирования. Поскольку число допустимых базисных решений конечно, то, вычислив для всех их значение целевой функции, можно найти оптимальное решение.

Правильно поставленные задачи обычно имеют оптимальное решение, хотя оно может оказаться не единственным. Графически это соответствует случаю, когда прямая L = const параллельна какой-либо прямой $x_i = 0$ и тогда оптимальным решениям будут отвечать все точки этой прямой в области допустимых решений. На практике выбирают только базисные решения, т.е. одну из двух вершин многоугольника на прямой $x_i = 0$.

Простой перебор всех допустимых базисных решений для нахождения оптимального решения трудоемок, особенно при большом числе переменных, поэтому разработаны специальные методы, позволяющие рационально организовать процесс вычисления.

§ 12.3. Решение основной задачи линейного программирования симплекс-методом

При произвольном числе свободных переменных графический метод решения основной задачи линейного программирования практически не используется. В этом случае удобен **симплекс-метод**, суть которого состоит в последовательном улучшении решения.

Вначале находят какое-либо допустимое базисное решение. Если имеется n переменных и m уравнений, то, приравняв $n-m$ переменных нулю, т.е. считая их свободными, находят решение m уравнений с m базисными переменными.

Если некоторые базисные переменные отрицательны, то изменяют набор свободных переменных так, чтобы базисное решение стало допустимым. После этого целевую функцию выражают через свободные переменные и определяют, достигла ли она минимума. Если минимум не достигнут, выбирают новое допустимое базисное решение, причем такое, которое уменьшает значение целевой функции. Изучим процесс такого решения на примере, рассмотренном в предыдущем параграфе.

Система ограничений и целевая функция заданы уравнениями:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 10 = 0; \\ x_1 - 0{,}5x_2 - x_4 + 1 = 0; \\ -0{,}5x_1 + x_2 - x_5 + 1 = 0 \end{cases} \qquad L = x_1 - x_2 .$$

Примем в качестве свободных переменные x_1 и x_2 и выразим через них базисные переменные x_3, x_4, x_5. Система ограничений при этом будет иметь вид

$$\begin{cases} x_3 = 10 - x_1 - x_2; \\ x_4 = 1 + x_1 - 0{,}5x_2; \\ x_5 = 1 - 0{,}5x_1 + x_2. \end{cases}$$

Приравняв нулю свободные переменные x_1 и x_2, получим из последней системы следующее базисное решение: $x_3 = 10$, $x_4 = 1$, $x_5 = 1$. Это допустимое решение, поскольку базисные переменные неотрицательны. Является ли оно оптимальным? Очевидно, что нет, так как значение целевой функции $L = x_1 - x_2 = 0$ можно уменьшить, увеличив переменную x_2, которая входит в целевую функцию с коэффициентом – 1. Поэтому переменную x_2 надо принять большей нуля, т.е. перевести в базисные, а одну из базисных переменных перевести в свободные.

Увеличение x_2 при $x_1 = 0$ приводит к уменьшению x_3 и x_4 и увеличению x_5, причем x_3 достигает нуля при $x_2 = 10$, а x_4 – при $x_2 = 2$. Если $x_2 > 2$, то переменная x_4 отрицательна.

Это означает, что она быстрее других достигает нуля, а значения $x_2 > 2$ приводят к недопустимому решению. Поэтому удобно перевести в свободные переменные именно x_4.

Итак, от свободных переменных x_1 и x_2 и базиса x_3, x_4, x_5 переходим к свободным переменным x_1 и x_4 и базису x_3, x_2, x_5. Выразим новые базисные переменные.

Из второго уравнения системы

$$\begin{cases} x_3 = 10 - x_1 - x_2; \\ x_4 = 1 + x_1 - 0{,}5x_2; \\ x_5 = 1 - 0{,}5x_1 + x_2. \end{cases}$$

найдем $x_2 = 2 + 2x_1 - 2x_4$, подставим это выражение в уравнения для x_3, x_5 и получим новую систему ограничений:

$$\begin{cases} x_3 = 8 - 3x_1 + 2x_4; \\ x_2 = 2 + 2x_1 - 2x_4; \\ x_5 = 3 + 1{,}5x_1 - 2x_4. \end{cases}$$

Целевая функция при этом будет иметь вид:

$$L = x_1 - x_2 = x_1 - 2 - 2x_1 + 2x_4 = -2 - x_1 + 2x_4.$$

Приняв в данной системе $x_1 = 0$ и $x_4 = 0$, найдем базисное решение: $x_3 = 8$, $x_2 = 2$, $x_5 = 3$. Как видно, оно является допустимым. Значение целевой функции $L = -2$. Это уже меньше, чем $L = 0$ на первом шаге, но еще не минимум, так как переменная x_1 входит в целевую функцию с коэффициентом – 1. Следовательно, увеличив x_1, можно уменьшить L. Поэтому x_1 переведем в базисные переменные. Из базисных переменных переведем x_3 в свободные переменные, поскольку только она уменьшается при увеличении x_1.

Найдем выражения для новых базисных переменных и целевой функции:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{8}{3} - \dfrac{1}{3}x_3 + \dfrac{2}{3}x_4; \\ x_2 = \dfrac{22}{3} - \dfrac{2}{3}x_3 - \dfrac{2}{3}x_4; \\ x_5 = 7 - \dfrac{1}{2}x_3 - x_4. \end{cases}$$

$$L = -\frac{14}{3} + \frac{1}{3}x_3 + \frac{4}{3}x_4.$$

Из полученных уравнений видно, что найденное при $x_3 = x_4 = 0$ базисное решение $x_1 = 4$, $x_2 = 10$, $x_5 = 9$ является допустимым, а на основании выражения для L делаем вывод, что при увеличении x_3 и x_4, целевая функция может только увеличиваться. Это означает, что при данном базисе достигнуто минимальное значение целевой функции $L = -\dfrac{14}{3}$.

Итак, на примере мы рассмотрели основной принцип решения общей задачи линейного программирования. Однако более удобен и менее громоздок табличный метод решения, сводящийся к пересчету коэффициентов уравнений по тем же правилам, которые мы использовали в примере.

§ 12.4. Решение основной задачи линейного программирования табличным методом

Для решения задач линейного программирования табличным методом сначала необходимо привести систему ограничений и целевую функцию к так называемой стандартной форме записи.

Обозначим через x'_i, $i = 1, \dots, m$, базисные переменные, а через x''_j, $j = 1, \dots, n-m$, – свободные переменные. При этом система ограничений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

и целевая функция $L = c_0 + c_1x_1 + \dots + c_nx_n = \min$ примут следующий вид:

$$\begin{cases} x'_1 = b_1 - (\alpha_{11}x''_1 + \alpha_{12}x''_2 + \dots + \alpha_{1\,n-m}x''_{n-m}); \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x'_m = b_m - (\alpha_{m1}x''_1 + \alpha_{m2}x''_2 + \dots + \alpha_{m\,n-m}x''_{n-m}); \end{cases}$$

$$L = b_0 - (\alpha_0 x''_1 + \alpha_{02}x''_2 + \dots + \alpha_{0\,n-m}x''_{n-m},$$

где $\alpha_{11} = -a_{11}$; $\alpha_{12} = -a_{12}$; … , $\alpha_{m\ n-m} = -a_{m\,n-m}$; $b_0 = c_0$; $\alpha_{01} = -c_1$; …

Для рассмотренного примера уравнения

$$\begin{cases} x_3 = 10 - x_1 - x_2; \\ x_4 = 1 + x_1 - 0{,}5x_2; \\ x_5 = 1 - 0{,}5x_1 + x_2. \end{cases} \quad \text{и} \quad L = x_1 - x_2$$

будут иметь соответственно вид:

$$\begin{cases} x'_1 = 10 - (x''_1 + x''_2); \\ x'_2 = 1 - (-x''_1 + 0{,}5x''_2); \\ x'_3 = 1 - (0{,}5x''_1 - x''_2); \end{cases}$$

$$L = 0 - (-x_1'' + x_2'').$$

Все данные о задаче представим в таблице 12.2, во втором столбце которой запишем свободные члены, в остальных – коэффициенты при свободных переменных, а в первой строке – коэффициенты целевой функции.

Таблица 12.2

	Свободный член	x_1''	…	x_{n-m}''
L	b_0	α_{01}	…	$\alpha_{0\,n-m}$
x_1'	b_1	α_{11}	…	$\alpha_{1\,n-m}$
…	…	…	…	…
x_m'	b_m	α_{m1}	…	$\alpha_{m\,n-m}$

Для примера рассмотрим таблицу 12.3, в каждой клетке которой в левом верхнем углу проставлены коэффициенты уравнений:

$$\begin{cases} x_1' = 10 - (x_1'' + x_2''); \\ x_2' = 1 - (-x_1'' + 0{,}5x_2''); \\ x_3' = 1 - (0{,}5x_1'' - x_2''); \end{cases}$$

$$L = 0 - (-x_1'' + x_2''),$$

а в нижнем – результаты последующих расчетов.

Таблица 12.3

	Свободный член	x_1''	x_2''
L	0 -2	-1 2	1 -2
x_1'	10 -2	1 2	1 -2
x_2'	1 2	-1 -2	**0,5** 2
x_3'	1 2	0,5 -2	-1 2

По столбцу свободных членов (кроме первого) можно определить, является ли данное базисное решение допустимым.

Для нашего примера, полагая $x_1'' = x_2'' = 0$, из последней системы получаем: $x_1' = b_1 = 10$, $x_2' = b_2 = 1$, $x_3' = b_3 = 1$. Следовательно, если свободные члены b_i неотрицательны, решение допустимо.

По элементам первой строки таблицы 12.3 можно определить значение целевой функции $L = b_0$ и узнать, является ли решение оптимальным. В нашем примере коэффициент при x_2'' положительный, значит, при увеличении x_2'' уменьшится целевая функция. Если хотя бы один из коэффициентов α_{01}, α_{02} положителен, решение неоптимальное, и его можно улучшить, переведя соответствующую свободную переменную в базисные. Величина b_0 является значением целевой функции и на допустимость или оптимальность решения не указывает.

Рассмотрим процесс получения оптимального решения для следующих систем уравнений

$$\begin{cases} x_1' = 10 - (x_1'' + x_2''); \\ x_2' = 1 - (-x_1'' + 0{,}5x_2''); \\ x_3' = 1 - (0{,}5x_1'' - x_2''); \end{cases}$$
$$L = 0 - (-x_1'' + x_2''),$$

представленных в табличной форме. Как мы видели, полученное базисное решение является допустимым и неоптимальным.

Для уменьшения целевой функции необходимо перевести переменную x_2'' в базисные. Обозначим соответствующий столбец двойными линиями. Теперь необходимо решить вопрос о том, какую базисную переменную перевести в свободные. Элементы первой строки при этом не учитываются, так как содержат информацию только о целевой функции. Для всех других строк вычислим отношение свободных членов к положительным коэффициентам выбранного столбца и определим ту строку, для которой это отношение наименьшее. Такое условие соответствует наиболее быстрому обращению в нуль базисной переменной.

В нашем примере $\dfrac{b_1}{\alpha_{11}} = \dfrac{10}{1} = 10$, $\dfrac{b_2}{\alpha_{22}} = 2$, коэффициент $\alpha_{32} = -1$ отрицательный, поэтому его из рассмотрения исключаем.

Таким образом, в свободные переменные переходит x_2'. Выделенную строку обозначим двойными линиями. Коэффициент, стоящий в клетке, образованной пересечением выделенных строки и столбца, называется **разрешающим элементом λ.** В таблице 12.3 это коэффициент, стоящий в клетке на пересечении строки и столбца, выделенных двойными линиями: $\lambda = \alpha_{22} = 0{,}5$. Его мы обозначим жирным шрифтом.

Далее нужно пересчитать коэффициенты для нового набора свободных переменных. Для этого вначале заполним правые нижние углы клеток по следующей схеме:

1) в клетке с разрешающим элементом запишем внизу справа обратную ему величину $1/\lambda$ (в примере $1/\lambda = 2$);

2) в выбранной строке исходные (верхние левые) коэффициенты, стоящие в левых верхних углах клеток, выделит курсивом, умножим на

$1/\lambda$, а результат запишем в правые нижние углы;

3) в выбранном столбце исходные коэффициенты умножим на $-1/\lambda$, результат запишем в правых нижних углах клеток и выделим их курсивом (кроме клетки с разрешающим элементом), во всех остальных клетках запишем произведение выделенных коэффициентов из строки и столбца, на пересечении которых стоит клетка;

4) заполним верхние левые углы клеток новой таблицы, подобной исходной, но вместо x_2' в ней будет стоять x_2'', а вместо $x_2'' - x_2'$;

5) в верхних углах выделенных строки и столбца запишем стоящие в нижних правых углах клеток исходной таблицы коэффициенты, соответствующие новым базисным и свободным переменным; в остальных клетках новой таблицы (таблица 12.4) запишем суммы коэффициентов из соответствующих клеток исходной таблицы.

Таблица 12.4

	Свободный член	x_1''	x_2''
L	–2 –8/3	1 –1/3	–2 2/3
x_1'	8 8/3	**3** **1/3**	–2 –2/3
x_2''	2 16/3	–2 2/3	2 –4/3
x_3'	3 4	–1,5 1/2	2 –1

Проанализируем полученное решение $x_1' = 8$, $x_2'' = 2$, $x_3' = 3$. Оно допустимое, но не оптимальное, так как коэффициент при x_1'' положителен. Следовательно, целевую функцию можно уменьшить, переведя x_1'' из свободных в базисные переменные.

Проделаем процедуру, аналогичную описанной выше. Выделим в таблице 12.4 столбец x_1'' и строку x_1'. В клетке, образованной при их пересечении, разрешающим элементом будет $\lambda = 3$. После пересчета коэффициентов заполним новую таблицу (табл. 12.5).

Полученное в таблице 12.5 базисное решение $x_1'' = 8/3$, $x_2'' = 22/3$, $x_3' = 7$ является допустимым, так как все переменные неотрицательны, и оптимальным, поскольку все коэффициенты целевой функции отрицательны. При этом $L_{\min} = -14/3$.

Таблица 12.5

	Свободный член	x_1'	x_2'
L	–14/3	–1/3	–4/3
x_1''	8/3	1/3	–2/3
x_2''	22/3	2/3	2/3
x_3'	7	1/2	1

При решении основной задачи линейного программирования может оказаться, что из свободных в базисные можно перевести несколько переменных. В этом случае в базисные переводят любую свободную переменную, у которой в целевой функции коэффициент α_{0j} положителен.

При выборе свободных и базисных переменных возможен вариант, когда одна или несколько базисных переменных меньше нуля. В этом случае необходимо изменить набор базисных переменных таким образом, чтобы отрицательных решений не было. Для этого можно поступить следующим образом. Вначале выбирается строка с отрицательным свободным членом, затем определяется, есть ли в этой строке отрицательные коэффициенты. Если есть, то один из соответствующих столбцов выбирается в качестве разрешающего.

Разрешающий элемент в столбце находится по правилу, противоположному тому, по которому его выбирали с помощью симплекс-метода. А именно: в качестве разрешающей строки выбирают ту, для которой отношение свободного члена к коэффициенту выбранного столбца (имеющему одинаковый знак со свободным членом) будет наибольшим. Далее переход к новым базисным переменным аналогичен.

Если в строке с отрицательным свободным членом нет отрицательного коэффициента ($\alpha_{ij} < 0$), это означает, что условия задачи несовместимы и она не имеет решения.

§ 12.5. Транспортная задача линейного программирования

Пример транспортной задачи приведен в параграфе 12.1. В общем виде она формулируется следующим образом.

В пунктах поставки $A_1, A_2, ..., A_n$ имеется $a_1, a_2, ..., a_n$ единиц однородной продукции (например, упаковок какого-то лекарства). Необходимо распределить их по пунктам назначения $B_1, B_2, ..., B_m$ в количествах

$b_1, b_2, ..., b_m$ таким образом, чтобы суммарная стоимость доставки была минимальной.

Стоимость доставки из A_i, в B_j, известна и равна c_{ij}**,** объем перевозки из из A_i, в B_j обозначим x_{ij}. В простейшем случае объем запасов в пунктах поставки должен быть равен объему заявок из пунктов потребления, т. е

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j .$$

Если это условие выполняется, транспортная задача называется **сбалансированной**, если нет, то путем введения фиктивного поставщика A_{n+1} или фиктивного заказчика B_{m+1} она приводится к сбалансированной. При этом условие баланса в общем случае можно записать в виде

$$\sum_{i=1}^{n+1} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j \qquad \text{или} \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m+1} b_j ,$$

где a_{n+1} – объем недостающей продукции, b_{m+1} – объем не вывезенной продукции. В дальнейшем будем считать, что транспортная задача является сбалансированной.

При выполнении условия баланса должны выполняться и условия равенства объемов перевозок x_{ij} и поставок a_i, из пункта A_i во все пункты B_j:

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i \qquad (i = 1, 2, ..., n).$$

Аналогичное условие должно соблюдаться и для объемов перевозок и потребностей $\mathrm{b_j}$ в пункте $\mathrm{B_j}$:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j \qquad (j = 1, 2, ..., m).$$

Суммарная стоимость перевозок в данном случае является функцией, которую надо минимизировать:

$$L = x_{11}c_{11} + x_{12}c_{12} + ... + x_{nm}c_{nm} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_{ij}c_{ij} .$$

Для несбалансированной задачи при введении фиктивных пунктов поставки A_{n+1} или фиктивных пунктов потребления B_{m+1} стоимости перевозок c_{n+1j} , или c_{im+1}, как правило, принимают равными нулю. Однако в некоторых задачах коэффициенты $c_{n+1\ j}$; или $c_{i\ m+1}$ полагают отличными от нуля. В этом случае они имеют смысл издержек на хранение и издержек дефицита соответственно.

Издержки на хранение продукции возникают вследствие затрат на создание условий для хранения, возможной порчи продукции, ее морального старения и т. п.

Издержки дефицита являются следствием недопоставок продукции; при этом выпуск конечного продукта сокращается либо становится невозможным.

Система $\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i$ из n уравнений и система $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j$ из m уравнений представляют собой типичные ограничения задачи линейного программирования, а функция стоимости L является целевой функцией задачи линейного программирования, так как эти системы линейны относительно x_{ij}. Однако транспортная задача имеет свои особенности:

1) все коэффициенты перед переменными x_{ij} в системах $\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i$ и $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j$ равны единице. Это значительно упрощает расчеты при поиске оптимального решения;

2) число уравнений-ограничений равно $m+n$. При этом число независимых переменных, определяющих базисное решение, на единицу меньше, так как все переменные связаны линейным соотношением

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j .$$

Число базисных переменных $r = m + n - 1$. Как и при решении основной задачи линейного программирования, их выражают через свободные переменные, число которых равно разности между общим количеством переменных и базисных переменных:

$$k = mn - r = mn - (m + n - 1) = (n-1)(m-1).$$

Любое базисное допустимое решение, а, следовательно, и оптимальное, содержит не более $m+n-1$ значений перевозок. Значения всех остальных перевозок равны нулю. Это позволяет значительно сократить число расчетных операций при нахождении оптимального решения. Например, при $m = n = 100$ только 1 % переменных $x_{ij} \neq 0$, а остальные 99% равны нулю.

Как и при решении основной задачи линейного программирования симплекс-методом, первым этапом решения транспортной задачи является определение допустимого базисного решения. Оказывается, при решении сбалансированной транспортной задачи любое базисное решение является допустимым.

Действительно, если общий запас в пунктах поставок равен общей потребности в пунктах потребления, любой план перевозок, удовлетворяющий условиям $\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i$ и $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j$, будет базисным и допустимым, так как обратные перевозки (т. е. отрицательные значения x_{ij}) не имеет смысла вводить.

Транспортную задачу можно решить симплекс-методом, но указанные отличительные особенности позволяют решать ее более простыми методами, которые являются упрощенными модификациями симплекс-метода.

Все данные о транспортной задаче удобно представить в виде транспортной таблицы, в которой указаны пункты поставки $A_1, A_2, ..., A_n$ и запасы $a_1, a_2, ..., a_n$, пункты потребления $B_1, B_2, ..., B_m$ их потребности $b_1, b_2, ..., b_m$. Стоимости перевозок будем записывать в верхних правых углах соответствующих клеток таблицы.

Рассмотрим метод потенциалов на примере таблицы 12.6.

Таблица 12.6

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	− 10 6	3 4	+ 8	2	10
A_2	6 +	5 3	14 9 −	10 2	14
A_3	4	5	3	7 8	8
b_j	6	7	9	10	32

Решение начинается с поиска допустимого базисного решения. Как уже говорилось в предыдущем параграфе, любое базисное решение транспортной задачи является одновременно и допустимым из-за отсутствия обратных перевозок (отрицательных переменных). Базисное решение можно найти, распределив запасы таким образом, чтобы все заявки были удовлетворены.

Такое решение проще получить **методом северо-западного угла**, суть которого заключается в следующем. Рассмотрим первый пункт потребления B_1. Его заявка содержит $b_1 = 6$ единиц груза; удовлетворим ее за счет первого пункта поставки и запишем в нижней части клетки, образованной пересечением строки A_1, и столбца B_1, перевозку $x_{11} = 6$. Оставшиеся в пункте A_1 четыре единицы груза отправим в пункт B_2; запишем $x_{12} = 4$ в нижнюю часть клетки, образованной пересечением строки A_1, и столбца B_2 (обозначим сокращенно эту клетку (A_1B_2)). Недостающие в пункте B_2 три единицы продукции удовлетворим из пункта поставки A_2 и перевозку $x_{22} = 3$ запишем в клетку (A_2B_2). Потребности пункта B_2 теперь полностью удовлетворены. Пункту B_3 необходимо $b_3 = 9$ единиц продукции, в пункте поставки A_2 осталось $a_2 - x_{22} = 14 - 3 = 11$ единиц. Девять единиц отправим из A_2 в B_3, т. е. $x_{23} = 9$; запишем это число в нижнюю часть клетки (A_2B_3). Оставшиеся в пункте A_2 две единицы отправим в B_4, т. е. $x_{24} = 2$. И, наконец, перевозка x_{34} из пункта A_3 в B_4 равна восьми. Итак, базисный допустимый план перевозок составлен. Является ли он оптимальным?

Стоимость этого плана равна величине его целевой функции

$$L = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij} = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + c_{22}x_{22} + c_{23}x_{23} + c_{24}x_{24} + c_{34}x_{34} =$$

$$= 10 \cdot 6 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 3 + 9 \cdot 14 + 10 \cdot 2 + 7 \cdot 8 = 289$$

Можно уменьшить величину целевой функции, заменив дорогие перевозки более дешевыми. Например, стоимость перевозки $x_{11}c_{11} = 10$. Потребности пункта B_1 дешевле удовлетворить из пункта A_2, так как стоимость перевозки $c_{12} = 6$. Чтобы соблюдался баланс, нужно груз такой же величины, т. е. 6 единиц, из пункта A_1 отправить в один из пунктов потребления, например B_3. Таким образом, мы заменили перевозку 6 единиц груза из A_1 в B_1, перевозкой 6 единиц груза из A_2 в B_1, и 6 единиц груза перебросили из A_1 в B_3, уменьшив перевозку из A_2 в B_3 на шесть единиц (что также уменьшает стоимость перевозок). Обозначим эти переброски стрелками, соединим ими центры рассмотренных клеток и проставим плюс там, где перевозки увеличивают, и минус, где их уменьшают. Полученная таким путем геометрическая фигура, соединяющая несколько клеток, состоит из прямых, соединенных под углом 90°, и называется **циклом транспортной таблицы**. Транспортная таблица для нового плана перевозок будет иметь вид таблицы 12.7.

Таблица 12.7

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	10	3 / 4	8 / 6	2	10
A_2	6 / 6	5 / 3	14 / 3	10 / 2	14
A_3	4	5	3	7 / 8	8
b_j	6	7	9	10	32

При этом целевая функция

$$L = 3 \cdot 4 + 8 \cdot 6 + 6 \cdot 6 + 5 \cdot 3 + 14 \cdot 3 + 10 \cdot 2 + 7 \cdot 8 = 229$$

Таким образом, изменив план перевозок путем переброски грузов по циклу, мы уменьшили значение целевой функции. Очевидно, что надо использовать только те циклы, которые уменьшают стоимость перевозок.

§ 12.6. Метод потенциалов

Поиск циклов, улучшающих план перевозок, – довольно трудоемкая задача, требующая известных навыков. Одним из формальных методов, позволяющих рационализировать этот процесс, является метод потенциалов, суть которого заключается в последовательном улучшении решения путем перевода переменных из свободных в базисные. Как и при использовании симплекс-метода, в базисные переводят те переменные, которые уменьшают целевую функцию. В примере, рассмотренном в параграфе 12.5, мы фактически перевели базисную переменную x_{11} в свободные, а переменную x_{21} – из свободных в базисные.

Будем считать, что каждый поставщик платит некоторую «цену» α_i за вывоз из пункта A_i. Каждый потребитель также платит некоторую «цену» β_j за перевозку в пункт B_j. Суммарная величина этих «цен» называется псевдостоимостью единицы груза или потенциалом и вычисляется по формуле

$$\tilde{c}_{ij} = \alpha_i + \beta_j$$

Платежи α_i и β_j могут быть как положительными, так и отрицательными.

Для базисных переменных будем считать стоимость и псевдостоимость равными, т. е

$$\alpha_i + \beta_j = c_{ij} = \tilde{c}_{ij} \quad \text{при} \quad x_{ij} > 0 .$$

Поскольку число базисных переменных, а, следовательно, и число уравнений $\tilde{c}_{ij} = \alpha_i + \beta_j$, равно $m + n - 1$, и число неизвестных величин α_i и β_j равно $m + n$, то одну из неизвестных можно взять любой по величине, удобнее всего равной нулю. При этом система платежей α_i и β_j определяется из условий $\alpha_i + \beta_j = c_{ij} = \tilde{c}_{ij}$, $x_{ij} > 0$.

После того, как из последних уравнений, справедливых только для базисных переменных, будут найдены все α_i и β_j можно подсчитать псевдостоимости для свободных переменных по формуле $\tilde{c}_{ij} = \alpha_i + \beta_j$.

Для свободных переменных псевдостоимость может быть больше стоимости, равна ей или меньше ее:

$$\tilde{c}_{ij} > c_{ij}; \quad \tilde{c}_{ij} = c_{ij}; \quad \tilde{c}_{ij} < c_{ij} .$$

Рассмотрим вычисление псевдостоимостей. Условия заданы транспортной таблицей (табл. 12.8).

В этой таблице добавлены новая строка для платежей β_j потребителя и столбец для платежей α_i поставщика. Для заданных объемов запасов и заявок составим базисный план методом северо-западного угла. Полученные значения перевозок проставим в нижних средних частях клеток, в правых верхних углах укажем стоимости перевозок, а в левых верхних – псевдостоимости.

Для клетки (A_1B_1), которая является базисной, запишем равенство вида $\alpha_i + \beta_j = c_{ij} = \tilde{c}_{ij}$, $x_{ij} > 0$:

$$\alpha_1 + \beta_1 = c_{11} \quad \text{или} \quad \alpha_1 + \beta_1 = 2.$$

Таблица 12.8

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	α_i
A_1	2 – 2 8	1 + 1 1	1 3	0 2	9	0
A_2	4 2 +	3 – 3 5	3 3 2	2 1	7	2
A_3	3 3	2 3	2 2 2	1 1 3	5	1
b_j	8	6	4	3	21	
β_j	2	1	1	0		

Положим одну из величин платежей равной нулю, например $\alpha_1 = 0$, тогда $\beta_1 = 2$. Запишем значения α_1 и β_1 в первые клетки столбца α_i и строки β_j.

Составим уравнения для второй базисной клетки (A_1B_2):

$$\alpha_1 + \beta_2 = 1; \quad 0 + \beta_2 = 1; \quad \beta_2 = 1.$$

Аналогично составляем уравнения для остальных клеток и определяем α_2, α_3, β_3, β_4:

$$\begin{cases} \alpha_2 + \beta_2 = 3; \quad \alpha_2 + 1 = 3; \quad \alpha_2 = 2; \quad \alpha_3 + \beta_3 = 2; \quad \alpha_3 = 1 \\ \alpha_2 + \beta_3 = 3; \quad 2 + \beta_3 = 3; \quad \beta_3 = 1; \quad \alpha_3 + \beta_4 = 1; \quad \beta_4 = 0. \end{cases}$$

По полученной системе платежей находим псевдостоимости для всех клеток транспортной таблицы. Для базисных клеток они должны быть равны стоимостям (что можно использовать для проверки правильности вычислений). В свободных клетках транспортной таблицы они могут различаться.

Итак, вычисляем псевдостоимости $\tilde{c}_{ij}$:

$$\tilde{c}_{11} = \alpha_1 + \beta_1 = 2; \quad \tilde{c}_{12} = \alpha_1 + \beta_2 = 1;$$

$$\tilde{c}_{13} = \alpha_1 + \beta_3 = 1; \quad \tilde{c}_{14} = \alpha_1 + \beta_4 = 0; \ \ldots$$

Полученные значения заносим в левые верхние углы клеток таблицы 12.8.

Значение целевой функции для полученного базисного плана перевозок (т. е. $c_{ij} = \tilde{c}_{ij}$) можно записать в виде

$$L = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \tilde{c}_{ij} x_{ij} = 2 \cdot 8 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot 5 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 45.$$

Изменим этот план, переведя одну из свободных переменных в базисные. Получится новое значение целевой функции:

$$L' = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij}.$$

Ее величина в общем случае может быть меньше, равна или больше L. Если для переводимой в базисные свободной переменной стоимость меньше псевдостоимости, то, поскольку для оставшихся прежними базисных переменных они равны, новое значение целевой функции окажется меньше. Этим переводом из свободных переменных в базисные мы улучшили план перевозок.

В таблице 12.8, например, такими свободными являются клетки (A_2B_1), (A_2B_4). Для остальных свободных клеток нашей транспортной таблицы $c_{ij} \geq \tilde{c}_{ij}$. Поэтому, если какую-нибудь из этих свободных переменных перевести в базисные, то значение целевой функции либо останется прежним, либо увеличится.

Сформулируем условия оптимальности плана:

1) целевую функцию можно уменьшать до тех пор, пока в транспортной таблице не останется свободных переменных, для которых стоимость меньше псевдостоимости;

2) если в каждой свободной клетке транспортной таблицы значение стоимости больше или равно значению псевдостоимости, целевую функцию уменьшить нельзя, следовательно, данный план перевозок оптимален, т. е.:

$$c_{ij} = \tilde{c}_{ij} \quad \text{при} \quad x_{ij} \geq 0; \qquad c_{ij} \geq \tilde{c}_{ij} \quad \text{при} \quad x_{ij} = 0.$$

В нашем примере переведем переменную (клетку) (A_2B_1) из свободных в базисные. Для этого построим цикл, проходящий через эту и соседние клетки:

$$(A_2B_1) \to (A_1B_1) \to (A_1B_2) \to (A_2B_2) \to (A_2B_1).$$

При этом по циклу переносится 5 единиц груза, т. е. минимальное значение из тех базисных переменных (в данном случае это переменная (A_2B_2)), которые уменьшаются.

Таким образом, в клетку (A_2B_1) переносится из клетки (A_2B_2) 5 единиц груза. Для соблюдения условия баланса из клетки (A_1B_1) в клетку (A_1B_2) нужно перенести также 5 единиц груза. При этом получается транспортная таблица 12.9.

При изменении плана перевозок меняются поставщики и потребители, система платежей, а следовательно, и псевдостоимости перевозок (стоимости c_{ij} остаются прежними). Для рассматриваемого примера получим: $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = -1$, $\beta_1 = 2$, $\beta_2 = 1$, $\beta_3 = 3$, $\beta_4 = 2$. Данные заносим в таблицу и находим свободную клетку, в которой псевдостоимость больше стоимости. Такой является клетка (A_2B_4). Строим цикл, проходящий через эту клетку. По циклу перебрасываем 2 единицы груза из клетки (A_2B_3) в клетку (A_2B_4) и из (A_3B_4) в (A_3B_3), что в таблице 12.8 отмечено соответствующими знаками.

Таблица 12.9

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	α_i
A_1	2 2 3	1 1 6	3 3	2 2	9	0
A_2	2 2 5	1 3	3 3 2	2 1	7	0
A_3	1 3	0 3	2 2 2	1 1 3	5	–1
b_j	8	6	4	3		
β_j	2	1	3	2		

Для нового плана перевозок вычисляем псевдостоимости и получаем новую транспортную таблицу (табл. 12.10).

Таблица 12.10

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	α_i
A_1	2 2 3	1 1 6	2 3	1 2	9	0
A_2	2 2 5	1 3	2 3	1 1 2	7	0
A_3	2 3	1 3	2 2 4	1 1 1	5	0
b_j	8	6	4	3		
β_j	2	1	2	1		

Как видно, полученный план является оптимальным, поскольку для каждой клетки выполняются условия:

$$c_{ij} = \tilde{c}_{ij} \quad \text{при} \quad x_{ij} \geq 0; \quad c_{ij} \geq \tilde{c}_{ij} \quad \text{при} \quad x_{ij} = 0.$$

Выпишем оптимальный план перевозок и найдем значение L:

$$x_{11} = 3; \quad x_{12} = 6; \quad x_{21} = 5; \quad x_{24} = 2; \quad x_{33} = 4; \quad x_{34} = 1;$$

$$x_{13} = x_{14} = x_{22} = x_{23} = x_{31} = x_{32} = 0;$$

$$L = 2 \cdot 3 + 1 \cdot 6 + 2 \cdot 5 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 1 = 33.$$

По сравнению с первым вариантом выигрыш составляет 12 единиц.

Рассмотренный метод решения хорошо реализуется на компьютере. При небольших объемах вычислений его можно использовать и для расчетов с помощью микрокалькуляторов.

Алгоритм решения транспортной задачи

1. Проверяется выполнение условий баланса $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j$ и составляется транспортная таблица с указанием заявок b_j, объема запасов a_i и стоимости перевозок c_{ij}.

2. Находится допустимый базисный план перевозок (x_{ij}).

3. Для базисных переменных составляется система уравнений вида $\alpha_i + \beta_j = c_{ij} = \tilde{c}_{ij}$ при $x_{ij} > 0$.

4. Полученная система решается в предположении, что одно из неизвестных, например α_i, равно нулю.

5. По формуле $\tilde{c}_{ij} = \alpha_i + \beta_j$ вычисляются псевдостоимости $\tilde{c}_{ij}$ и проставляются в верхних левых углах клеток транспортной таблицы.

6. Выбирается одна свободная переменная (клетка), для которой псевдостоимость больше стоимости, и строится цикл переброски грузов. При этом в составленном цикле в свободные переводится базисная переменная, имеющая минимальное значение. Если таких свободных клеток нет, то процесс заканчивается.

7. Составляются новый план перевозок и новая транспортная таблица. Далее процесс вычислений аналогичен пунктам 3 – 6.

При преобразовании транспортной таблицы может получиться, что в свободные перейдут несколько базисных переменных. Число их в этом случае будет меньше $m + n - 1$, что соответствует так называемому **вырожденному решению**.

Вырожденное решение неудобно тем, что в этом случае имеется $m + n$ переменных, а уравнений, по которым находятся платежи α_i и β_j меньше $m + n - 1$. Поэтому такую систему уравнений решить рассмотренным методом нельзя.

Для сведения вырожденного решения к невырожденному базисному имеется несколько способов. Самый простой – введение нулевых (фиктивных) перевозок. При этом переведенной в свободные переменные считается только одна, стоящая в первой по циклу клетке, а остальные, для которых в построенном цикле $x_{ij}=0$, считаются базисными. Это позволяет использовать приведенный выше алгоритм без изменений.

Пусть, например, в результате преобразования транспортная таблица примет вид таблицы 12.11.

После переброски единицы груза по построенному циклу

$$(A_1B_3)\to(A_1B_4)\to(A_2B_4)\to(A_2B_3)$$

получается, что в свободные переменные переходит не одна базисная, а сразу две – (A_1B_3) и (A_2B_4), что приводит к

Таблица 12.11

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	α_i
A_1	–2 10	–3 3	8 – 8 1	2 + 2 9	10	0
A_2	6 6 6	5 5 7	16 14 +	10 – 10 1	14	8
A_3	–7 4	–8 5	3 3 8	–3 7	8	–5
b_j	6	7	9	10		
β_j	–2	–3	8	2		

вырожденному решению. Чтобы получить невырожденное базисное решение, в клетке (A_2B_4) ставим объем перевозок 0 и считаем эту переменную базисной. Система платежей при этом определяется аналогично ранее рассмотренным случаям. Как видно из таблицы 12.12, полученное решение является оптимальным, хотя и вырожденным.

Таблица 12.12

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	α_i
A_1	–2 10	–3 3	6 8	2 2 10	10	0
A_2	6 6 6	5 5 7	14 14 1	10 10 0	14	8
A_3	–5 4	–6 5	3 3 8	–1 7	8	–3
b_j	6	7	9	10		
β_j	–2	–3	6	2		

Вопросы для самоконтроля

1. В каком случае применяются математические методы оптимизации?
2. Перечислите разработанные методы оптимизации.
3. К чему сводится решение задачи оптимизации? Приведите примеры.
4. Что называется целевой функцией?
5. Дайте определение транспортной задачи линейного программирования.
6. Какие существуют типы задач линейного программирования?
7. Что необходимо сделать, чтобы решить основную задачу линейного программирования?
8. В чем заключается особенность задач линейного программирования?
9. Что такое базис или базисное решение?
10. Какие переменные называются базисными, а какие свободными?
11. Перечислите основные этапы, к которым сводится графическое решение задач оптимизации в случае целевой функции двух аргументов.
12. Что понимается под областью допустимых решений в графическом решении задачи оптимизации?
13. Каким образом можно представить геометрическую интерпретацию оптимального решения задачи оптимизации?
14. В чем заключается смысл симплекс-метода?
15. Перечислите основные этапы для решения задачи линейного программирования табличным методом?
16. Что такое разрешающий элемент?
17. Возможен ли случай, когда одна или несколько базисных переменных будут иметь отрицательные значения?
18. При каком условии транспортная задача является сбалансированной?
19. Для каких целей служит транспортная таблица?
20. В чем заключается метод северо-западного угла?
21. Что называется циклом транспортной таблицы?
22. В каком случае можно применять метод потенциалов?
23. Что такое потенциал?
24. Сформулируйте условия оптимального плана при использовании метода потенциалов.
25. Какое решение называют вырожденным?

Задания для решения

1. При переработке некоторого лекарственного сырья возможно использование одной из двух технологий. При переработке сырья по первой технологии выход полезного продукта составляет 15%, на пере-

работку 1 кг сырья затрачивается 8 чел.-ч и 12 руб. При переработке сырья по второй технологии выход полезного продукта составляет 10%, на переработку 1 кг сырья затрачивается 14 чел.-ч и 9 руб. Фонд заработной платы не превышает 3960 руб., трудовые ресурсы – 4480 чел.-ч. Масса лекарственного сырья 400 кг. Какое количество сырья надо переработать по первой технологии и по второй технологии, чтобы получить максимальный выход полезного продукта?

2. Аптека закупает у населения плоды шиповника по цене 2 руб. за 1 кг и рябины по цене 0,5 руб. за 1 кг, а затем, расфасовав их, продает по цене соответственно 3 руб. и 1 руб. за 1 кг. На закупку аптеке разрешено использовать не более 800 руб., а план закупок составляет 200 кг шиповника и 300 кг рябины. Аптека закупила у населения 300 кг шиповника и 500 кг рябины. Оптимальны ли результаты в отношении прибыли от закупок и продажи плодов? Найти оптимальный план, соответствующий оптимальной прибыли.

3. Размещение аптек в сельской местности определяется по критерию минимума времени на получение лекарства. В приведенной ниже таблице указаны запасы a_i и заявки b_j (сотен упаковок), а также время (в часах). Найти оптимальный план размещения аптек.

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	4	3	2	7	46
A_2	1	1	6	4	34
A_3	3	5	9	4	40
b_j	40	35	30	45	

4. В трех аптечных управлениях скопился излишек a_i (тыс. упаковок) витамина С. В пяти других аптечных управлениях его недостаток составил b_i (тыс. упаковок). Стоимости перевозки 1 тыс. упаковок (в десятках рублей) указаны в приведенной ниже таблице. Найти оптимальный план перевозок.

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	8	6	4	7	11
A_2	9	5	6	3	14
A_3	7	5	5	4	15
b_j	5	7	13	9	

5. При срочных поставках медикаментов критерием является минимальное время их доставки. Запасы вакцины a_i и потребность в ней b_j указаны в приведенной ниже таблице (в центнерах). Время доставки

указано в часах. Найти оптимальный план поставок.

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	5	10	5	10	16
A_2	8	4	4	8	40
A_3	6	3	6	3	32
A_4	4	7	7	5	12
b_j	30	10	20	40	

6. При размещении аптек в качестве критерия может быть принято расстояние от аптек до населенных пунктов. В приведенной ниже таблице указаны запасы антибиотиков, заявки (тыс. упаковок) и расстояния (в километрах). Найти оптимальный план размещения аптек.

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	a_i
A_1	2	1	2	4	3	5	120
A_2	5	4	2	8	6	7	60
A_3	1	2	3	2	1	3	80
b_j	30	10	50	70	30	70	

ПРИЛОЖЕНИЯ

1. Значения функции $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

x	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3989	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3726	0,3712	0,3697
0,4	0,3683	0,3668	0,3653	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,3565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551

x	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
2,0	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0396	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0355	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046
3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009
3,5	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3,6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004
3,7	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
3,8	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,9	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001

2. Значения функции распределения нормированной нормально распределенной случайной величины

$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{u} \mathrm{e}^{-u^2/2} du$$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8963	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9454	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767

Окончание приложения 2

x	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998

3. Распределение Пуассона. Значение функции $\sum_{k=x}^{\infty} a^k e^{-a} / k!$

А. При *a*, равном 0,1 … 0,9									
x \ ***a***	**0,1**	**0,2**	**0,3**	**0,4**	**0,5**	**0,6**	**0,7**	**0,8**	**0,9**
0	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
1	0,095	1,181	0,259	0,330	0,394	0,451	0,503	0,551	0,593
2	0,005	0,018	0,037	0,062	0,090	0,122	0,156	0,191	0,228
3		0,001	0,003	0,008	0,014	0,023	0,034	0,047	0,063
4				0,001	0,002	0,003	0,006	0,009	0,014
5							0,001	0,001	0,002

Б. При *a*, равном 1,0 … 9,0									
a / ***x***	**1,0**	**2,0**	**3,0**	**4,0**	**5,0**	**6,0**	**7,0**	**8,0**	**9,0**
0	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
1	0,632	0,865	0,950	0,982	0,993	0,996	0,999	1,000	1,000
2	0,264	0,594	0,801	0,908	0,960	0,983	0,924	0,997	0,999
3	0,080	0,323	0,577	0,762	0,875	0,938	0,970	0,986	0,994
4	0,019	0,143	0,353	0,567	0,735	0,849	0,918	0,958	0,979
5	0,004	0,053	0,185	0,371	0,560	0,715	0,827	0,900	0,945
6	0,001	0,018	0,084	0,215	0,384	0,554	0,699	0,809	0,884
7		0,005	0,034	0,111	0,238	0,394	0,550	0,987	0,793
8		0,001	0,012	0,051	0,133	0,256	0,401	0,547	0,676
9				0,021	0,068	0,153	0,271	0,408	0,544
10				0,008	0,032	0,084	0,170	0,283	0,413
11				0,003	0,014	0,043	0,099	0,184	0,294
12				0,001	0,005	0,020	0,053	0,112	0,197
13					0,002	0,008	0,027	0,068	0,124
14					0,001	0,004	0,013	0,034	0,074
15						0,001	0,006	0,017	0,042
16						0,001	0,002	0,008	0,022
17							0,001	0,004	0,011
18								0,002	0,005
19								0,001	0,002
20									0,001

4. Значения коэффициента Стьюдента

γ / $f=n-1$	0,95	0,99	0,999	γ / $f=n-1$	0,95	0,99	0,999
1	12,706	63,657	636,619	**18**	2,103	2,878	3,922
2	4,303	9,925	31,598	**19**	2,093	2,861	3,883
3	3,182	5,841	12,941	**20**	2,086	2,845	3,850
4	2,776	4,604	8,610	**21**	2,080	2,831	3,819
5	2,571	4,032	6,859	**22**	2,074	2,819	3,792
6	2,447	3,707	5,957	**23**	2,069	2,807	3,767
7	2,365	3,499	5,405	**24**	2,064	2,797	3,745
8	2,306	3,355	5,041	**25**	2,060	2,787	3,725
9	2,262	3,250	4,781	**26**	2,056	2,779	3,707
10	2,228	3,169	4,587	**27**	2,052	2,771	3,690
11	2,201	3,106	4,487	**28**	2,048	2,763	3,674
12	2,179	3,055	4,318	**29**	2,045	2,756	3,659
13	2,160	3,012	4,221	**30**	2,042	2,750	3,646
14	2,145	2,977	4,140	**40**	2,021	2,704	3,551
15	2,131	2,947	4,073	**60**	2,000	2,660	3,460
16	2,120	2,921	4,015	**120**	1,980	2,617	3,374
17	2,110	2,898	3,965	∞	1,960	2,576	3,291

5. Критические значения распределения Фишера-Снедекора

f_2 \ f_1	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
При α=0,05												
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	243	244
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,36	19,37	19,38	19,39	19,40	19,41
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,88	8,84	8,81	8,78	8,76	8,74
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,93	5,91
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,78	4,74	4,70	4,68
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,03	4,00
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,63	3,60	3,57
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,34	3,31	3,28
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,13	3,10	3,07
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,97	2,94	2,91
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,86	2,82	2,79
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,92	2,85	2,80	2,76	2,72	2,69
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,84	2,77	2,72	2,67	2,63	2,60
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,77	2,70	2,65	2,60	2,56	2,53
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,70	2,64	2,59	2,55	2,51	2,48

f_2 \ f_1	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
При α=0,025															
1	648	800	864	900	922	637	948	957	963	968	985	993	1001	1005	1010
2	38,51	39,00	39,17	39,25	39,30	39,33	39,36	39,37	39,39	39,40	39,43	39,45	39,47	39,47	39,48
3	17,44	16,04	15,44	15,10	14,89	14,74	14,62	14,54	14,47	14,42	14,25	14,17	14,08	14,04	14,00
4	12,22	10,65	9,98	9,60	9,36	9,20	9,07	8,98	8,90	8,84	8,66	8,56	8,46	8,41	8,36
5	10,00	8,43	7,76	7,39	7,15	6,98	6,85	6,76	6,68	6,62	6,43	6,33	6,23	6,18	6,12
6	8,81	7,26	6,60	6,23	5,99	5,82	5,70	5,60	5,52	5,46	5,27	5,17	5,07	5,01	4,96
7	8,07	6,54	5,89	5,52	5,29	5,12	5,00	4,90	4,82	4,76	4,57	4,47	4,36	4,31	4,25
8	7,57	6,06	5,42	5,05	4,82	4,65	4,53	4,43	4,36	4,30	4,10	4,00	3,89	3,84	3,78
9	7,21	5,71	5,08	4,72	4,48	4,32	4,20	4,10	4,03	3,96	3,77	3,67	3,56	3,51	3,45
10	6,94	5,46	4,83	4,47	4,24	4,07	3,95	3,85	3,78	3,72	3,52	3,42	3,31	3,26	3,20
11	6,72	5,26	4,63	4,28	4,04	3,88	3,76	3,66	3,59	3,53	3,33	3,23	3,12	3,06	3,00
12	6,55	5,10	4,47	4,12	3,89	3,72	3,61	3,51	3,44	3,37	3,18	3,07	2,96	2,91	2,85
13	6,41	4,97	4,35	4,00	3,77	3,60	3,48	3,39	3,31	3,25	3,05	2,95	2,84	2,78	2,72
14	6,30	4,86	4,24	3,89	3,66	3,50	3,38	3,29	3,21	3,15	2,95	2,84	2,73	2,67	2,61
15	6,20	4,77	4,15	3,80	3,58	3,41	3,29	3,20	3,12	3,06	2,86	2,76	2,64	2,59	2,52

6. Значения функции $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^z e^{-u^2/2}du$, $\Phi(-z) = -\Phi(z)$

z	Φ(z)	z	Φ(z)	z	Φ(z)	z	Φ(z)
0,00	0,0000	0,21	0,0832	0,42	0,1628	0,63	0,2357
0,01	0,0040	0,22	0,0871	0,43	0,1664	0,64	0,2389
0,02	0,0080	0,23	0,0910	0,44	0,1700	0,65	0,2422
0,03	0,0120	0,24	0,0948	0,45	0,1736	0,66	0,2454
0,04	0,0160	0,25	0,0987	0,46	0,1772	0,67	0,2486
0,05	0,0199	0,26	0,1026	0,47	0,1808	0,68	0,2517
0,06	0,0239	0,27	0,1064	0,48	0,1844	0,69	0,2549
0,07	0,0279	0,28	0,1103	0,49	0,1879	0,70	0,2580
0,08	0,0319	0,29	0,1141	0,50	0,1915	0,71	0,2611
0,09	0,0359	0,30	0,1179	0,51	0,1950	0,72	0,2642
0,10	0,0398	0,31	0,1217	0,52	0,1985	0,73	0,2673
0,11	0,0438	0,32	0,1255	0,53	0,2019	0,74	0,2703
0,12	0,0478	0,33	0,1293	0,54	0,2054	0,75	0,2734
0,13	0,0517	0,34	0,1331	0,55	0,2088	0,76	0,2764
0,14	0,0557	0,35	0,1368	0,56	0,2123	0,77	0,2794
0,15	0,0596	0,36	0,1406	0,57	0,2157	0,78	0,2823
0,16	0,0636	0,37	0,1443	0,58	0,2190	0,79	0,2852
0,17	0,0676	0,38	0,1480	0,59	0,2224	0,80	0,2881
0,18	0,0714	0,39	0,1517	0,60	0,2257	0,81	0,2910
0,19	0,0753	0,40	0,1554	0,61	0,2291	0,82	0,2939
0,20	0,0793	0,41	0,1591	0,62	0,2324	0,83	0,2967

Продолжение приложения 6

z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$
0,84	0,2995	1,05	0,3531	1,26	0,3962	1,47	0,4292
0,85	0,3023	1,06	0,3554	1,27	0,3980	1,48	0,4306
0,86	0,3051	1,07	0,3577	1,28	0,3997	1,49	0,4319
0,87	0,3078	1,08	0,3599	1,29	0,4015	1,50	0,4332
0,88	0,3106	1,09	0,3621	1,30	0,4032	1,51	0,4345
0,89	0,3133	1,10	0,3643	1,31	0,4049	1,52	0,4357
0,90	0,3159	1,11	0,3665	1,32	0,4066	1,53	0,4370
0,91	0,3186	1,12	0,3686	1,33	0,4082	1,54	0,4382
0,92	0,3212	1,13	0,3708	1,34	0,4099	1,55	0,4394
0,93	0,3238	1,14	0,3729	1,35	0,4115	1,56	0,4406
0,94	0,3264	1,15	0,3749	1,36	0,4131	1,57	0,4418
0,95	0,3289	1,16	0,3770	1,37	0,4147	1,58	0,4429
0,96	0,3315	1,17	0,3790	1,38	0,4162	1,59	0,4441
0,97	0,3340	1,18	0,3810	1,39	0,4177	1,60	0,4452
0,98	0,3365	1,19	0,3830	1,40	0,4192	1,61	0,4463
0,99	0,3389	1,20	0,3849	1,41	0,4207	1,62	0,4474
1,00	0,3413	1,21	0,3869	1,42	0,4222	1,63	0,4484
1,01	0,3438	1,22	0,3883	1,43	0,4236	1,64	0,4495
1,02	0,3461	1,23	0,3907	1,44	0,4251	1,65	0,4505
1,03	0,3485	1,24	0,3925	1,45	0,4265	1,66	0,4515
1,04	0,3508	1,25	0,3944	1,46	0,4279	1,67	0,4525

Окончание приложения 6

z	Φ(z)	z	Φ(z)	z	Φ(z)	z	Φ(z)
1,68	0,4535	1,91	0,4719	2,28	0,4887	2,74	0,4969
1,69	0,4545	1,92	0,4726	2,30	0,4893	2,76	0,4971
1,70	0,4554	1,93	0,4732	2,32	0,4898	2,78	0,4973
1,71	0,4564	1,94	0,4738	2,34	0,4904	2,80	0,4974
1,72	0,4573	1,95	0,4744	2,36	0,4909	2,82	0,4976
1,73	0,4582	1,96	0,4750	2,38	0,4913	2,84	0,4977
1,74	0,4591	1,97	0,4756	2,40	0,4918	2,86	0,4979
1,75	0,4599	1,98	0,4761	2,42	0,4922	2,88	0,4980
1,76	0,4608	1,99	0,4767	2,44	0,4927	2,90	0,4981
1,77	0,4616	2,00	0,4772	2,46	0,4931	2,92	0,4982
1,78	0,4625	2,02	0,4783	2,48	0,4934	2,94	0,4984
1,79	0,4634	2,04	0,4793	2,50	0,4938	2,96	0,4985
1,80	0,4641	2,06	0,4803	2,52	0,4941	2,98	0,4986
1,81	0,4649	2,08	0,4812	2,54	0,4945	3,00	0,49865
1,82	0,4656	2,10	0,4821	2,56	0,4948	3,20	0,49931
1,83	0,4664	2,12	0,4830	2,58	0,4951	3,40	0,49966
1,84	0,4671	2,14	0,4838	2,60	0,4953	3,60	0,499841
1,85	0,4678	2,16	0,4846	2,62	0,4956	3,80	0,499928
1,86	0,4686	2,18	0,4854	2,64	0,4959	4,00	0,499968
1,87	0,4693	2,20	0,4861	2,66	0,4961	4,50	0,499997
1,88	0,4699	2,22	0,4868	2,68	0,4963	5,00	0,499997
1,89	0,4706	2,24	0,4875	2,70	0,4965		
1,90	0,4713	2,26	0,4881	2,72	0,4967		

7. Критические значения $t_{кр}(\alpha, f)$ распределения Стьюдента (двусторонняя критическая область)

Число степеней свободы *f*=*n*-2	**Уровень значимости α=1-γ**			**Число степеней свободы *f*=*n*-2**	**Уровень значимости α=1-γ**		
	0,10	**0,05**	**0,01**		**0,10**	**0,05**	**0,01**
1	6,31	12,7	63,7	**18**	1,73	2,10	2,88
2	2,92	4,30	9,92	**19**	1,73	2,09	2,86
3	2,35	3,18	5,84	**20**	1,73	2,09	2,85
4	2,13	2,78	4,60	**21**	1,72	2,08	2,83
5	2,01	2,57	4,03	**22**	1,72	2,07	2,82
6	1,94	2,45	3,71	**23**	1,71	2,07	2,81
7	1,89	2,36	3,50	**24**	1,71	2,06	2,80
8	1,86	2,31	3,36	**25**	1,71	2,06	2,79
9	1,83	2,26	3,25	**26**	1,71	2,06	2,78
10	1,81	2,23	3,17	**27**	1,71	2,05	2,77
11	1,80	2,20	3,11	**28**	1,70	2,05	2,76
12	1,78	2,18	3,05	**29**	1,70	2,05	2,76
13	1,77	2,16	3,01	**30**	1,70	2,04	2,75
14	1,76	2,14	2,98	**40**	1,68	2,02	2,70
15	1,75	2,13	2,95	**60**	1,67	2,00	2,66
16	1,75	2,12	2,92	**120**	1,66	1,98	2,62
17	1,74	2,11	2,90	∞	1,64	1,96	2,58

8. Критические значения критерия Манна-Уитни *T* для двусторонней критической области

Численность группы		Приблизительный уровень значимости α					
		0,05			0,01		
меньшей	большей	критические значения		точное значение α	критические значения		точное значение α
3	4	6	18	0,057			
	5	6	21	0,036			
	5	7	20	0,071			
	6	7	23	0,048	6	24	0,024
	7	7	26	0,033	6	27	0,017
	7	8	25	0,067			
	8	8	28	0,042	6	30	0,012
4	4	11	25	0,057	10	26	0,026
	5	11	29	0,032	10	30	0,016
	5	12	28	0,063			
	6	12	32	0,038	10	34	0,010
	7	13	35	0,042	10	38	0,012
	8	14	38	0,048	11	41	0,008
	8				12	40	0,016
5	5	17	38	0,032	15	40	0,008
	5	18	37	0,056	16	39	0,016
	6	19	41	0,052	16	44	0,010
	7	20	45	0,048	17	48	0,010
	8	21	49	0,045	18	52	0,011

Численность группы		**Приблизительный уровень значимости α**					
		0,05			**0,01**		
меньшей	**большей**	**критические значения**		**точное значение α**	**критические значения**		**точное значение α**
6	6	26	52	0,041	23	55	0,009
	6				24	54	0,015
	7	28	56	0,051	24	60	0,008
	7				25	59	0,014
	8	29	61	0,043	25	65	0,008
	8	30	60	0,059	26	64	0,013
7	7	37	68	0,053	33	72	0,011
	8	39	73	0,054	34	78	0,009
8	8	49	87	0,050	44	92	0,010

9. Критические значения критерия Манна-Уитни *T* для двусторонней критической области (расширенная таблица)

Численность группы		Критические значения при α = 0,05		Критические значения при α = 0,01	
меньшей	**большей**	**нижнее**	**верхнее**	**нижнее**	**верхнее**
6	6	26	52	23	55
6	7	27	57	24	60
6	8	29	61	25	65
6	9	31	65	26	70
6	10	32	70	27	75
6	11	34	74	28	80
6	12	35	79	30	84
6	13	37	83	31	89
6	14	38	88	32	94
6	15	40	92	33	99
6	16	42	96	34	104
6	17	43	101	36	108
6	18	45	105	37	113
6	19	46	110	38	118
6	20	48	114	39	123
6	21	50	118	40	128
6	22	51	123	42	132
6	23	53	127	43	137
6	24	54	132	44	142
6	25	56	136	45	147
7	7	36	69	32	73
7	8	38	74	34	78

Продолжение приложения 9

Численность группы		**Критические значения при α = 0,05**		**Критические значения при α = 0,01**	
меньшей	**большей**	**нижнее**	**верхнее**	**нижнее**	**верхнее**
7	9	40	79	35	84
7	10	42	84	37	89
7	11	44	89	38	95
7	12	46	94	40	100
7	13	48	99	41	106
7	14	50	104	43	111
7	15	52	109	44	117
7	16	54	114	46	122
7	17	56	119	47	128
7	18	58	124	49	133
7	19	60	129	50	139
7	20	62	134	52	144
7	21	64	139	53	150
7	22	66	144	55	155
7	23	68	149	57	160
7	24	70	154	58	166
7	25	72	159	60	171
8	8	49	87	43	93
8	9	51	93	45	99
8	10	53	99	47	105
8	11	55	105	49	111
8	12	58	110	51	117
8	13	60	116	53	123

Численность группы		**Критические значения при α = 0,05**		**Критические значения при α = 0,01**	
меньшей	**большей**	**нижнее**	**верхнее**	**нижнее**	**верхнее**
8	14	62	122	54	130
8	15	65	127	56	136
8	16	67	133	58	142
8	17	70	138	60	148
8	18	72	144	62	154
8	19	74	150	64	160
8	20	77	155	66	166
8	21	79	161	68	172
8	22	81	167	70	178
8	23	84	172	71	185
8	24	86	178	73	191
8	25	89	183	75	197
9	9	62	109	56	115
9	10	65	115	58	122
9	11	68	121	61	128
9	12	71	127	63	135
9	13	73	134	65	142
9	14	76	140	67	149
9	15	79	146	69	156
9	16	82	152	72	162
9	17	84	159	74	169
9	18	87	165	76	176

Продолжение приложения 9

Численность группы		**Критические значения при α = 0,05**		**Критические значения при α = 0,01**	
меньшей	**большей**	**нижнее**	**верхнее**	**нижнее**	**верхнее**
9	19	90	171	78	183
9	20	93	177	81	189
9	21	95	184	83	196
9	22	98	190	85	203
9	23	101	196	88	209
9	24	104	202	90	216
9	25	107	208	92	223
10	10	78	132	71	139
10	11	81	139	73	147
10	12	84	146	76	154
10	13	88	152	79	161
10	14	91	159	81	169
10	15	94	166	84	176
10	16	97	173	86	184
10	17	100	180	89	191
10	18	103	187	92	198
10	19	107	193	94	206
10	20	110	200	97	213
10	21	113	207	99	221
10	22	116	214	102	228
10	23	119	221	105	235
10	24	122	228	107	243
10	25	126	234	110	250

Численность группы		**Критические значения при α = 0,05**		**Критические значения при α = 0,01**	
меньшей	**большей**	**нижнее**	**верхнее**	**нижнее**	**верхнее**
11	11	96	157	87	166
11	12	99	165	90	174
11	13	103	172	93	182
11	14	106	180	96	190
11	15	110	187	99	198
11	16	113	195	102	206
11	17	117	202	105	214
11	18	121	209	108	222
11	19	124	217	111	230
11	20	128	224	114	238
11	21	131	232	117	246
11	22	135	239	120	254
11	23	139	246	123	262
11	24	142	254	126	270
11	25	146	261	129	278
12	12	115	185	105	195
12	13	119	193	109	203
12	14	123	201	112	212
12	15	127	209	115	221
12	16	131	217	119	229
12	17	135	225	122	238
12	18	139	233	125	247

Продолжение приложения 9

Численность группы		**Критические значения при α = 0,05**		**Критические значения при α = 0,01**	
меньшей	**большей**	**нижнее**	**верхнее**	**нижнее**	**верхнее**
12	19	143	241	129	255
12	20	147	249	132	264
12	21	151	257	136	272
12	22	155	265	139	281
12	23	159	273	142	290
12	24	163	281	146	298
12	25	167	289	149	307
13	13	136	215	125	226
13	14	141	223	129	235
13	15	145	232	133	244
13	16	150	240	136	254
13	17	154	249	140	263
13	18	158	258	144	272
13	19	163	266	148	281
13	20	167	275	151	291
13	21	171	284	155	300
13	22	176	292	159	309
13	23	180	301	163	318
13	24	185	309	166	328
13	25	189	318	170	337
14	14	160	246	147	259
14	15	164	256	151	269

Численность группы		**Критические значения при α = 0,05**		**Критические значения при α = 0,01**	
меньшей	**большей**	**нижнее**	**верхнее**	**нижнее**	**верхнее**
14	16	169	265	155	279
14	17	174	274	159	289
14	18	179	283	163	299
14	19	183	293	168	308
14	20	188	302	172	318
14	21	193	311	176	328
14	22	198	320	180	338
14	23	203	329	184	348
14	24	207	339	188	358
14	25	212	348	192	368
15	15	184	281	171	294
15	16	190	290	175	305
15	17	195	300	180	315
15	18	200	310	184	326
15	19	205	320	189	336
15	20	210	330	193	347
15	21	216	339	198	357
15	22	221	349	202	368
15	23	226	359	207	378
15	24	231	369	211	389
15	25	237	378	216	399
16	16	211	317	196	332

Продолжение приложения 9

Численность группы		Критические значения при α = 0,05		Критические значения при α = 0,01	
меньшей	**большей**	**нижнее**	**верхнее**	**нижнее**	**верхнее**
16	17	217	327	201	343
16	18	222	338	206	354
16	19	228	348	210	366
16	20	234	358	215	377
16	21	239	369	220	388
16	22	245	379	225	399
16	23	251	389	230	410
16	24	256	400	235	421
16	25	262	410	240	432
17	17	240	355	223	372
17	18	246	366	228	384
17	19	252	377	234	395
17	20	258	388	239	407
17	21	264	399	244	419
17	22	270	410	249	431
17	23	276	421	255	442
17	24	282	432	260	454
17	25	288	443	265	466
18	18	270	396	252	414
18	19	277	407	258	426
18	20	283	419	263	439
18	21	290	430	269	451

Продолжение приложения 9

Численность группы		**Критические значения при α = 0,05**		**Критические значения при α = 0,01**	
меньшей	**большей**	**нижнее**	**верхнее**	**нижнее**	**верхнее**
18	22	296	442	275	463
18	23	303	453	280	476
18	24	309	465	286	488
18	25	316	476	292	500
19	19	303	438	283	458
19	20	309	451	289	471
19	21	316	463	295	484
19	22	323	475	301	497
19	23	330	487	307	510
19	24	337	499	313	523
19	25	344	511	319	536
20	20	337	483	315	505
20	21	344	496	322	518
20	22	351	509	328	532
20	23	359	521	335	545
20	24	366	534	341	559
20	25	373	547	348	572
21	21	373	530	349	554
21	22	381	543	356	568
21	23	388	557	363	582
21	24	396	570	370	596
21	25	404	583	377	610

Численность группы		**Критические значения при α = 0,05**		**Критические значения при α = 0,01**	
меньшей	**большей**	**нижнее**	**верхнее**	**нижнее**	**верхнее**
22	22	411	579	386	604
22	23	419	593	393	619
22	24	427	607	400	634
22	25	435	621	408	648
23	23	451	630	424	657
23	24	459	645	431	673
23	25	468	659	439	688
24	24	492	684	464	712
24	25	501	699	472	728
25	25	536	739	505	770

10. Критические значения критерия Уилкоксона *W* для двусторонней критической области в зависимости от количества наблюдений n при уровне значимости α

n	***W***	**α**	***n***	***W***	**α**
5	15	0,062	14	73	0,02
6	21	0,032	15	63	0,05
	19	0,062		80	0,022
7	28	0,016	16	70	0,048
	24	0,046		88	0,022
8	32	0,024	17	76	0,05
	28	0,054		97	0,02
9	39	0,02	18	83	0,05
	33	0,054		105	0,02
10	45	0,02	19	91	0,048
	39	0,048		114	0,02
11	52	0,018	20	98	0,05
	44	0,054		124	0,02
12	58	0,02		106	0,048
	50	0,052			
13	65	0,022			
	57	0,048			

11. Критические значения распределения χ^2

f \ α	**0,99**	**0,98**	**0,95**	**0,9**	**0,8**	**0,7**	**0,5**	**0,3**	**0,2**	**0,1**	**0,05**	**0,02**	**0,01**	**0,001**
1	0	0,001	0,004	0,016	0,064	0,148	0,455	1,074	1,642	2,71	3,84	5,41	6,64	10,83
2	0,02	0,04	0,103	0,211	0,446	0,713	1,386	2,41	3,22	4,6	5,99	7,82	9,21	13,82
3	0,115	0,183	0,352	0,584	1,005	1,424	2,37	3,66	4,64	6,25	7,82	9,84	11,34	16,27
4	0,297	0,429	0,711	1,064	1,649	2,2	3,36	4,88	5,99	7,78	9,49	11,67	13,28	18,46
5	0,554	0,752	1,145	1,61	2,34	3	4,35	6,06	7,29	9,24	11,07	13,39	15,09	20,5
6	0,872	1,134	1,635	2,2	3,07	3,83	5,35	7,23	8,56	10,64	12,59	15,03	16,81	22,5
7	1,239	1,564	2,17	2,83	3,82	4,67	6,35	8,38	8,8	12,02	14,07	16,62	18,48	24,3
8	1,646	2,03	2,73	3,49	4,59	5,53	7,34	9,52	11,03	13,36	15,51	18,17	20,1	26,1
9	2,09	2,53	3,32	4,17	5,38	6,39	8,34	10,66	12,24	14,68	16,92	19,68	21,7	27,9
10	2,56	3,06	3,94	4,86	6,18	7,27	9,34	11,78	13,44	15,99	18,31	21,2	23,2	29,6
11	3,05	3,61	4,58	5,58	6,99	8,15	10,34	12,9	14,63	17,28	19,68	22,6	24,7	31,3
12	3,57	4,18	5,23	6,3	7,81	9,03	11,34	14,01	15,81	18,55	21	24,1	26,2	32,9
13	4,11	4,76	5,89	7,04	8,63	9,93	12,34	15,12	16,98	19,81	22,4	25,5	27,7	34,6
14	4,66	5,37	6,57	7,79	9,47	10,82	13,34	16,22	1815	21,1	23,7	26,9	29,1	36,1
15	5,23	5,98	7,26	8,55	10,31	11,72	14,34	17,32	19,31	22,3	25	28,3	30,6	37,7
16	5,81	6,61	7,96	9,31	11,15	12,62	15,34	18,42	20,5	23,5	26,3	29,6	32	39,3
17	6,41	7,26	8,67	10,08	12	13,53	16,34	19,51	21,6	24,8	27,6	31	33,4	40,8
18	7,02	7,91	9,39	10,86	12,86	14,44	17,34	20,6	22,8	26	28,9	32,3	34,8	42,3
19	7,63	8,57	10,11	11,65	13,72	15,35	18,34	21,7	23,9	27,2	30,1	33,7	36,2	43,8
20	8,26	9,24	10,85	12,44	14,58	16,27	19,34	22,8	25	28,4	31,4	35	37,6	45,3
21	8,9	9,92	11,59	13,24	15,44	17,18	21,3	23,9	26,2	29,6	32,7	36,3	38,9	46,8
22	9,54	10,6	12,34	14,04	16,31	18,1	21,3	24,9	27,3	30,8	33,9	37,7	40,3	48,3
23	10,2	11,29	13,09	14,85	17,19	10,02	22,3	26	28,4	32	35,2	39	41,6	49,7

α / f	0,99	0,98	0,95	0,9	0,8	0,7	0,5	0,3	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01	0,001
24	10,86	11,98	13,85	15,66	18,06	19,94	23,3	27,1	29,6	33,2	36,4	40,3	43	51,2
25	11,52	12,7	14,61	16,47	18,94	20,9	24,3	28,2	30,7	34,4	37,7	41,7	44,3	52,6
26	12,2	13,41	1538	17,29	19,82	21,8	25,3	29,2	31,8	35,6	38,9	42,9	45,6	54,1
27	12,88	14,12	16,15	18,11	20,7	22,7	26,3	30,3	32,9	36,7	40,1	44,1	47	55,5
28	13,56	14,85	16,93	18,94	21,6	23,6	27,3	31,4	34	37,9	41,3	45,4	48,3	56,9
29	14,26	15,57	17,71	19,77	22,5	24,6	28,3	32,5	35,1	39,1	42,6	46,7	49,6	58,3
30	14,95	16,31	18,49	20,6	23,4	25,5	29,3	33,5	36,2	40,3	43,8	48	50,9	59,7

12. Критические значения *F* для критерия Фридмана

k	***n***	**α**				
		0,05	**0,02**	**0,01**	**0,005**	**0,001**
3	3	6,000	-		-	-
3	4	6,500	8,000	8,000	8,000	-
3	5	6,400	6,400	8,400	10,000	10,000
3	6	7,000	8,333	9,000	10,333	12,000
3	7	7,143	8,000	8,857	10,286	12,286
3	8	6,250	7,750	9,000	9,750	12,250
3	9	6,222	8,000	8,667	10,667	12,667
4	2	6,000	-	-	-	-
4	3	7,400	8,200	9,000	9,000	-
4	4	7,800	8,400	9,600	10,200	11,100

13. Критические значения распределения Кочрена
(*f*=*N*-1 – число степеней свободы, *m* – количество выборок)

m \ *f*	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**16**	**36**	**144**	**∞**
							При α=0,01							
2	0,9999	0,9950	0,9794	0,9586	0,9373	0,9172	0,8988	0,8823	0,8674	0,8539	0,7949	0,7067	0,6062	0,5000
3	0,9933	0,9423	0,8831	0,8335	0,7933	0,7606	0,7335	0,7107	0,6912	0,6743	0,6056	0,5153	0,4230	0,3333
4	0,9676	0,8643	0,7814	0,7212	0,6761	0,6410	0,6129	0,5897	0,5702	0,5536	0,4884	0,4057	0,3251	0,2500
5	0,9279	0,7885	0,6957	0,6329	0,5875	0,5531	0,5259	0,5037	0,4854	0,4697	0,4094	0,3351	0,2644	0,2000
6	0,8828	0,8218	0,6258	0,5635	0,5195	0,4866	0,4608	0,4401	0,4229	0,4084	0,3529	0,2858	0,2229	0,1667
7	0,8376	0,6644	0,5685	0,5080	0,4659	0,4347	0,4105	0,3911	0,3751	0,3616	0,3105	0,2494	0,1929	0,1429
8	0,7945	0,6152	0,5209	0,4627	0,4226	0,3932	0,3704	0,3522	0,3373	0,3248	0,2779	0,2214	0,1700	0,1250
9	0,7544	0,5727	0,4810	0,4251	0,3870	0,3592	0,3378	0,3207	0,3067	0,2950	0,2514	0,1992	0,1521	0,1111
10	0,7175	0,5358	0,4469	0,3934	0,3572	0,3308	0,3106	0,2945	0,2813	0,2704	0,2297	0,1811	0,1376	0,1000
12	0,6528	0,4751	0,3919	0,3428	0,3099	0,2861	0,2680	0,2535	0,2419	0,2320	0,1961	0,1535	0,1157	0,0833
15	0,5747	0,4069	0,3317	0,2882	0,2593	0,2386	0,2228	0,2104	0,2002	0,1918	0,1612	0,1251	0,0934	0,0667
20	0,4799	0,3297	0,2654	0,2288	0,2048	0,1877	0,1748	0,1646	0,1567	0,1501	0,1248	0,0960	0,0709	0,0500
24	0,4247	0,2871	0,2295	0,1970	0,1759	0,1608	0,1495	0,1406	0,1338	0,1283	0,1060	0,0810	0,0595	0,0417
30	0,3632	0,2412	0,1913	0,1635	0,1454	0,1327	0,1232	0,1157	0,1100	0,1054	0,0867	0,0658	0,0480	0,0333
40	0,2940	0,1915	0,1508	0,1281	0,1135	0,1033	0,0957	0,0898	0,0853	0,0816	0,0668	0,0503	0,0363	0,0250
60	0,2151	0,1371	0,1069	0,0902	0,0796	0,0722	0,0668	0,0625	0,0594	0,0567	0,0461	0,0344	0,0245	0,0167
120	0,1225	0,0759	0,0585	0,0489	0,0429	0,0387	0,0357	0,0334	0,0316	0,0302	0,0242	0,0178	0,0125	0,0083
∞	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Окончание приложения 13

m \ *f*	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**16**	**36**	**144**	∞
При α=0,05														
2	0,9985	0,9750	0,9392	0,9057	0,8772	0,8534	0,8332	0,8159	0,8010	0,7880	0,7341	0,6602	0,5813	0,5000
3	0,9669	0,8709	0,7977	0,7457	0,7071	0,6771	0,6530	0,6333	0,6167	0,6025	0,5466	0,4748	0,4031	0,3333
4	0,9065	0,7679	0,6841	0,6287	0,5895	0,5598	0,5365	0,5175	0,5017	0,4884	0,4366	0,3720	0,3093	0,2500
5	0,8412	0,6338	0,5981	0,5440	0,5063	0,4783	0,4564	0,4387	0,4241	0,4118	0,3645	0,3066	0,2013	0,2000
6	0,7808	0,6161	0,5321	0,4803	0,4447	0,4184	0,3980	0,3817	0,3682	0,3568	0,3135	0,2612	0,2119	0,1667
7	0,7271	0,5612	0,4800	0,4307	0,3974	0,3726	0,3535	0,3384	0,3259	0,3154	0,2756	0,2278	0,1833	0,1429
8	0,6798	0,5157	0,4377	0,3910	0,3595	0,3362	0,3185	0,3043	0,2926	0,2829	0,2462	0,2022	0,1616	0,1250
9	0,6385	0,4775	0,4027	0,3584	0,3286	0,3067	0,2910	0,2768	0,2659	0,2568	0,2226	0,1820	0,1446	0,1111
10	0,6020	0,4450	0,3733	0,3311	0,3029	0,2823	0,2666	0,2541	0,2439	0,2353	0,2032	0,1655	0,1308	0,1000
12	0,5410	0,3924	0,3624	0,2880	0,2624	0,2439	0,2299	0,2187	0,2098	0,2020	0,1737	0,1403	0,1100	0,0833
15	0,4709	0,3346	0,2758	0,2419	0,2195	0,2034	0,1911	0,1815	0,1736	0,1671	0,1429	0,1144	0,0889	0,0667
20	0,3894	0,2705	0,2205	0,1921	0,1735	0,1602	0,1501	0,1422	0,1357	0,1303	0,1108	0,0879	0,0675	0,0500
24	0,3434	0,2354	0,1907	0,1656	0,1493	0,1374	0,1286	0,1216	0,1160	0,1113	0,0942	0,0743	0,0567	0,0417
30	0,2929	0,1980	0,1593	0,1377	0,1237	0,1137	0,1061	0,1002	0,0958	0,0921	0,0771	0,0604	0,0457	0,0333
40	0,2370	0,1576	0,1259	0,1082	0,0968	0,0887	0,0827	0,0780	0,0745	0,1713	0,0595	0,0462	0,0347	0,0250
60	0,1737	0,1131	0,0895	0,0765	0,0682	0,0623	0,0583	0,0552	0,0520	0,0497	0,0411	0,0316	0,0234	0,0167
120	0,0998	0,0632	0,0495	0,0419	0,0371	0,0337	0,0312	0,0292	0,0279	0,0266	0,0218	0,0165	0,0120	0,0083
∞	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

14. Значения функций e^{-x} и e^{x}

x	e^{-x}	e^{x}	x	e^{-x}	e^{x}	x	e^{-x}	e^{x}
0,0	1,000	1,00	1,8	0,165	6,05	3,6	0,027	36,6
0,1	0,905	1,11	1,9	0,150	6,69	3,7	0,025	40,5
0,2	0,818	1,22	2,0	0,135	7,39	3,8	0,022	44,7
0,3	0,741	1,35	2,1	0,123	8,17	3,9	0,020	49,4
0,4	0,670	1,49	2,2	0,111	9,03	4,0	0,018	54,6
0,5	0,607	1,65	2,3	0,100	9,97	4,5	0,011	90,02
0,6	0,549	1,82	2,4	0,091	11,0	5,0	0,00674	148,4
0,7	0,497	2,01	2,5	0,082	12,2	5,5	0,00409	244,7
0,8	0,449	2,23	2,6	0,074	13,5	6,0	0,00248	403,4
0,9	0,407	2,46	2,7	0,067	14,9	6,5	0,00150	665,1
1,0	0,368	2,72	2,8	0,061	16,5	7,0	0,000912	1096,6
1,1	0,333	3,00	2,9	0,055	18,2	7,5	0,000553	1808,0
1,2	0,301	3,32	3,0	0,050	20,1	8,0	0,000335	2981,0
1,3	0,273	3,67	3,1	0,045	22,2	8,5	0,000203	4914,8
1,4	0,247	4,06	3,2	0,041	24,5	9,0	0,000123	8103,1
1,5	0,223	4,48	3,3	0,037	27,1	9,5	0,000075	13360,0
1,6	0,202	4,95	3,4	0,033	30,0	10,0	0,000045	220026,0
1,7	0,183	5,47	3,5	0,030	33,1			

15. Некоторые сведения из элементарной математики

АЛГЕБРА

Действия над многочленами

$$(a+b+c)m = am + bm + cm;$$

$$(a+b+c)(m+n) = a(m+n) + b(m+n) + c(m+n) = \\ = am + an + bm + bn + cm + cn;$$

$$\frac{a+b+c}{m} = \frac{a}{m} + \frac{b}{m} + \frac{c}{m}.$$

Действия над дробями

1. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d}$ сложение,
2. $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - c \cdot b}{b \cdot d}$ вычитание,
3. $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$ умножение,
4. $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$ деление.

Формулы сокращённого умножения

1. $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ – разность квадратов.
2. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ – квадрат разности.
3. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ – квадрат суммы
4. $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$ – куб разности
5. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$ – куб суммы
6. $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$ – сумма квадратов
7. $a^2 + b^2 = (a-b)^2 + 2ab$ – сумма квадратов
8. $a^3 - b^3 = (a-b)^3 + 3ab(a-b) = (a-b)\underbrace{(a^2 + ab + b^2)}_{\text{Неполный квадрат суммы}}$ – разность кубов
9. $a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b) = (a+b)\underbrace{(a^2 - ab + b^2)}_{\text{Неполный квадрат разности}}$ – сумма кубов
10. $(x+y+a)^2 = x^2 + y^2 + a^2 + 2xy + 2ax + 2ay$ – квадрат трехчлена
11. $(x-y-a)^2 = x^2 + y^2 + a^2 - 2xy - 2ax - 2ay$ – квадрат трехчлена

Действия со степенями

$a^m a^n = a^{m+n}$; $\quad a^0 = 1, \quad a \neq 0$,

$\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$; $\quad a^1 = a$;

$(ab)^m = a^m b^m$; $\quad 1^a = 1$

$\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m}$; $\quad a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}$

$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$; $\quad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

Преобразование арифметических корней

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n \cdot k]{a^k}, (a \geq 0);$$
$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}, (a \geq 0, b \geq 0);$$
$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}, (a \geq 0, b \geq 0);$$
$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}, (a \geq 0, n - \text{натуральное});$$
$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}, \text{ где } \begin{pmatrix} a \geq 0; m, n \in N \\ m \geq 2, n \geq 2 \end{pmatrix};$$
$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} |a| - \text{если} \quad n - \text{четное, натуральное}, n \geq 2. \\ a - \text{если} \quad n - \text{нечетное, натуральное}, n \geq 3. \end{cases};$$

Если $a_1 > a_2 > 0$, то $\sqrt[n]{a_1} > \sqrt[n]{a_2}$.

Преобразование квадратного корня

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b};$$
$$\left(\sqrt{a}\right)^n = \sqrt{a^n}, \text{ где } (a > 0, n - \text{натуральное});$$
$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, \text{ где } (a \geq 0, b > 0);$$
$$\sqrt{a} > \sqrt{b}, \text{ если } a > b;$$
$$\sqrt{a} < \sqrt{b}, \text{ если } a < b.$$

Комплексные числа

Алгебраическая форма $a+bi$,
где a – действительная часть комплексного числа,
b – мнимая часть,
i – мнимая единица $i=\sqrt{-1}$; $i^2=-1$.

Решение уравнений

Линейные уравнения с одной переменной

Это уравнения вида: $ax+b=0$, где $a\neq 0$, x – неизвестное.

Данное уравнения имеет решение: $ax=-b$, $x=-\dfrac{b}{a}$ – корень уравнения.

Квадратные уравнения

В общем случае квадратное уравнение ax^2+bx+c имеет решение:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ или } x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a},$$

где $D=b^2-4ac$ – дискриминант.
Далее возможны три случая:
1. $D>0$, тогда уравнение имеет два действительных корня:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}.$$

2. $D=0$, тогда уравнение имеет два одинаковых действительных корня:

$$x_1=x_2=-\frac{b}{2a}.$$

3. $D<0$ – уравнение не имеет действительных корней.

Примечание.
1) Иногда квадратное уравнение имеет вид $x^2+px+q=0$ и называется **приведенным**, оно не содержит коэффициента *а*. Тогда его решение выглядит несколько по-другому:

$$x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}.$$

2) Уравнения вида $ax^4+bx^2+c=0$ называются **биквадратными.** С помощью замены переменной $x^2=y$ оно приводится к стандартному

квадратному уравнению вида $ay^2+by+c=0$ и далее решается по формуле для корней обычного квадратного уравнения.

Теорема Виета

$$x_1+x_2=-p=-\frac{b}{a}; \qquad x_1\cdot x_2=q=\frac{c}{a}.$$

Логарифмы

Логарифм – показатель степени, в которую надо возвести данное основание, чтобы получить данное число.

$$\log_b N=x \qquad b^x=N \qquad (b \text{ – основание})$$

$$a^{\log_a N}=N \text{ – основное логарифмическое тождество}$$

Основные свойства логарифмов:

1. $\log_a(x\cdot y)=\log_a x+\log_a y$;
2. $\log_a\left(\frac{x}{y}\right)=\log_a x-\log_a y$;
3. $\log_a x^k=k\cdot\log_a x$;

Частными случаями свойства 3 являются:

3а. $\log_a\left(\frac{1}{b}\right)=-\log_a b$; 3б. $\log\sqrt[n]{x}=\frac{1}{n}\log_a x$;

4. Формула перехода к новому основанию: $\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$;
5. $\log_a 1=0$, так как $a^0=1$;
6. $\log_a a=1$, так как $a^1=a$.

Десятичные логарифмы

$$\lg N=x \qquad 10^x=N$$

(основание логарифма b=10).

1. $\lg 10^n=n$; 2. $\lg 10^{-n}=-n$; 3. $\lg 10=1$.

Натуральные логарифмы

$$\ln N = x \qquad e^{x} = N$$

Основание логарифма e = 2,718… ≈ 2,7.

Например, $\ln 6 = 1{,}79$. Это значит, что $e^{1{,}79} = 6$.

$$\ln N = \ln 10 \cdot \lg N \approx 2{,}3 \lg N;$$

$$\lg N = \lg e \cdot \ln N \approx 0{,}43 \ln N.$$

ТРИГОНОМЕТРИЯ

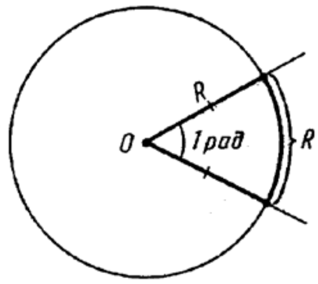
Радианное измерение угла

За **1 радиан** принимается величина центрального угла, которому соответствует дуга окружности, длина которой равна радиусу

$$1\,\text{радиан} = \frac{180^0}{\pi} \approx 57^0 17'$$

$$1^0 = \frac{\pi}{180}\,\text{радиан} = 0{,}0175\,\text{радиана};$$

$$1' = \frac{\pi}{180 \cdot 60}\,\text{радиана} \approx 0{,}00029\,\text{радиана}.$$



Углы в градусах α°	1°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Углы в радианах α_1 рад	0,0175	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

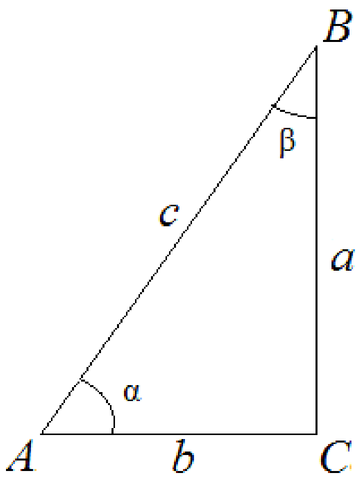
Определения тригонометрических функций

Синусом угла α называется отношение:

$$\sin\alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{c}$$

Косинусом угла α называется отношение:

$$\cos\alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}$$



Тангенсом угла α называется отношение:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{a}{b}$$

Котангенсом угла α называется отношение:

$$\mathrm{ctg}\alpha = \frac{AC}{BC} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{b}{a}$$

Значения синуса, косинуса, тангенса для различных углов

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	1
$\mathrm{tg}\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	0	$\sqrt{3}$	–	0
$\mathrm{ctg}\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	–	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	–

Основные тригонометрические тождества

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1;.$$

$$1 + \mathrm{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha};$$

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha};$$

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha};$$

$$\mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{ctg}\alpha = 1;$$

$$1 + \mathrm{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha},\ (\cos\alpha \neq 0);$$

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{1}{\mathrm{ctg}\alpha}, (\cos\alpha \neq 0);$$

$$\mathrm{ctg}\alpha = \frac{1}{\mathrm{tg}\alpha},\ \ (\sin\alpha \neq 0).$$

Формулы сложения и вычитания

Синус суммы и разности двух аргументов:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta$$

Косинус суммы и разности двух аргументов:

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta$$

Тангенс суммы и разности двух аргументов:

$$\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta}{1-\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta}$$
$$\mathrm{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\mathrm{tg}\alpha-\mathrm{tg}\beta}{1+\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta}$$

Формулы приведения

Для синуса

1. $\sin(90^\circ+\alpha)=\cos\alpha$
2. $\sin(180^\circ+\alpha)=-\sin\alpha$
3. $\sin(270^\circ+\alpha)=-\cos\alpha$
4. $\sin(360^\circ+\alpha)=\sin\alpha$
5. $\sin(90^\circ-\alpha)=\cos\alpha$
6. $\sin(180^\circ-\alpha)=\sin\alpha$
7. $\sin(270^\circ-\alpha)=-\cos\alpha$
8. $\sin(360^\circ-\alpha)=-\sin\alpha$

Для косинуса

1. $\cos(90^\circ+\alpha)=-\sin\alpha$
2. $\cos(180^\circ+\alpha)=-\cos\alpha$
3. $\cos(270^\circ+\alpha)=\sin\alpha$
4. $\cos(360^\circ+\alpha)=\cos\alpha$

4. $\cos(90^\circ-\alpha)=\sin\alpha$
6. $\cos(180^\circ-\alpha)=-\cos\alpha$
7. $\cos(270^\circ-\alpha)=-\sin\alpha$
8. $\cos(360^\circ-\alpha)=\cos\alpha$

Тригонометрические функции двойного аргумента

$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$; $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$;

$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$; $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$;

$$\mathrm{tg}2\alpha = \frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha} = \frac{2}{\mathrm{ctg}\alpha - \mathrm{tg}\alpha};$$

$$\mathrm{ctg}2\alpha = \frac{\mathrm{ctg}^2\alpha - 1}{2\mathrm{ctg}\alpha} = \frac{\mathrm{ctg}\alpha - \mathrm{tg}\alpha}{2}.$$

Степени синуса и косинуса

$$\sin^2\alpha = (1-\cos 2\alpha)/2, \qquad \cos^2\alpha = (1+\cos 2\alpha)/2;$$

$$4\sin^3\alpha = 3\sin\alpha - \sin 3\alpha; \qquad 4\cos^3\alpha = 3\cos\alpha + \cos 3\alpha$$

Тригонометрические функции половинного аргумента

1) Синус половинного угла $\sin\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$

2) Косинус половинного угла $\cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$

3) Тангенс половинного угла $\mathrm{tg}\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$

$$\mathrm{tg}\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1+\cos x} = \frac{1-\cos x}{\sin x}$$

4) Котангенс половинного угла $\mathrm{ctg}\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}$

$$\mathrm{ctg}\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1-\cos x} = \frac{1+\cos x}{\sin x}$$

Преобразование суммы и разности тригонометрических функций в произведение

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2};$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

Формулы преобразования произведения

$$\sin x \cos y = \frac{\sin(x+y) + \sin(x-y)}{2};$$

$$\cos x \cos y = \frac{\cos(x+y) + \cos(x-y)}{2};$$

$$\sin x \sin y = \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2}.$$

ГЛОССАРИЙ

Анализ дисперсионный – это статистический метод анализа результатов наблюдений, зависящих от различных одновременно действующих факторов, основанный на сравнении оценок дисперсий соответствующих групп выборочных данных.

Анализ дисперсионный многофакторный (многомерный) – дисперсионный анализ, в котором изучается влияние более чем одного фактора.

Анализ дисперсионный однофакторный (одномерный) – дисперсионный анализ, в котором проверяется влияние одного фактора.

Аргумент – независимая переменная x, от значений которой зависят значения функции

Варианта – наблюдаемые значения признака.

Величина дискретная (прерывная) – случайная величина, принимающая отдельные друг от друга возможные значения с определенными вероятностями, которые можно пронумеровать.

Величина непрерывная – случайная величина, которая может принимать любые значения внутри определенного интервала, конечного или бесконечного.

Величина переменная – величина, которая в данных условиях может принимать множество различных числовых значений.

Вероятность доверительная – вероятность того, что истинное значение оцениваемой величины находится внутри доверительного интервала.

Вероятность классическая – отношение числа m элементарных событий, благоприятствующих событию A, к числу n всех равновозможных несовместных элементарных событий

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Вероятность статистическая – число $P(A)$, около которого группируются значения относительной частоты при больших n.

Вероятность условная – вероятность события B, вычисленная при условии, что имело место событие A.

Выборка – множество объектов, случайно отобранных из генеральной совокупности.

Выборка бесповторная – выборка, объекты которой не возвращаются в генеральную совокупность.

Выборка повторная – выборка, отбирающаяся по одному объекту, который обследуют и снова возвращают в генеральную совокупность.

Выборка репрезентативная (представительная) – выборка, объект которой считается отобранным из генеральной совокупности случайно, если все объекты имеют одинаковую вероятность попасть в выборку.

Геометрический смысл дифференциала – дифференциал функции $y=f(x)$ в точке с абсциссой x равен приращению ординаты касательной, проведенной к графику функции в этой точке, при переходе из данной точки в точку с абсциссой $x+\Delta x$.

Геометрический смысл определённого интеграла – площадь криволинейной трапеции численно равна интегралу от функции, ограничивающей трапецию, взятому на интервале интегрирования $[a;b]$:

$$S=\int_a^b f(x)\,dx, \quad f(x)\geq 0.$$

Геометрический смысл производной – производная функции в данной точке равна угловому коэффициенту касательной к графику функции в данной точке, т.е. $f'(x_0)=\mathrm{tg}\alpha$.

Гипотеза альтернативная (конкурирующая) – предположение, принимаемое в случае отклонения нулевой гипотезы.

Гипотеза нулевая – это основное проверяемое предположение, которое обычно формулируется как отсутствие различий, отсутствие влияние фактора, отсутствие эффекта, равенство нулю значений выборочных характеристик и т.п.

Гипотеза статистическая – это предположение о виде или о параметрах генеральной совокупности, которое проверяется на основе выборочных данных.

Гистограмма относительных частот – диаграмма, состоящая из вертикальных прямоугольников, основаниями которых являются интервалы длиной $\Delta x = h$, а высоты прямоугольников равны отношению $m_i / n\Delta x$, т. е. равны плотности относительной частоты (эмпирической плотности вероятности).

Гистограмма частот – диаграмма, состоящая из вертикальных прямоугольников, основаниями которых являются интервалы длиной $\Delta x = h$, а высоты равны отношению $m_i / \Delta x$ (плотности частоты).

Главная цель выборочного метода – по вычисленной характеристике выборки как можно точнее определить соответствующую характеристику генеральной совокупности.

График функции – изображение на координатной плоскости множества пар (x, y).

Группа случайных событий полная – совокупность попарно несовместных событий, одно из которых происходит при одном испытании.

Дисперсия – мера разброса данной случайной величины, т.е. её отклонение от математического ожидания.

Дисперсия выборочная – среднее арифметическое квадратов отклонения полученных значений $x_1, x_2, ..., x_n$ от выборочной средней:

$$D(X) = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}_i)^2}{n}; \quad D(X) = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}_i)^2 m_i}{n}.$$

Дисперсия генеральная – среднее арифметическое квадратов отклонений величин $x_1, x_2, ..., x_N$ генеральной совокупности объемом N от их среднего арифметического $X = \mu$

$$D(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \mu).$$

Дисперсия дискретной случайной величины – математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины X от ее математического ожидания μ:

$$D(X) = \sigma^2 = M((X - \mu)^2), \quad D(X) = \sigma^2 = M(X^2) - \mu^2.$$

Дисперсия абсолютно непрерывной случайной величины – величина определенного интеграла

$$D(X) = \int_a^b (x - \mu)^2 f(x)\, dx.$$

Дифференциал функции – главная часть приращения функции, равная произведению производной функции на дифференциал аргумента:

Дифференциал функции полный – главная часть полного приращения функции, равная сумме произведений частных производных функции на дифференциалы соответствующих независимых переменных

$$dz = d_x z + d_y z = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

Дифференциал функции частный – произведение соответствующей частной производной функции на дифференциал этой переменной:

$$d_x f = \frac{\partial f}{\partial x} dx.$$

Дифференцирование – процесс нахождения производной.

Зависимость корреляционная – зависимость, когда каждому значению *X* ставится в соответствие математическое ожидание (среднее арифметическое значение) распределения другой величины.

Зависимость статистическая – зависимость, при которой каждому значению величины *X* из множества ее возможных значений соответствует некоторое множество возможных значений величины *Y*, характеризуемое определенным законом распределения.

Задача Коши – задача нахождения частного решения удовлетворяющего его начальным условиям.

Задача линейного программирования основная – задача, которая состоит в определении максимального значения функции $F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ при выполнении условий $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$ $(j = \overline{k+1, m})$ и $x_j \geq 0$ $(j = \overline{1, l})$ $l \leq n$, где $k = 0$ и $n = 1$.

Задача сглаживания временно́го ряда – выявить основную тенденцию изменения ряда, на которую налагаются случайные отклонения.

Закон больших чисел – группа близких по содержанию теорем теории вероятности, указывающих условия возникновения тех или иных закономерностей в результате действия большого числа случайных факторов.

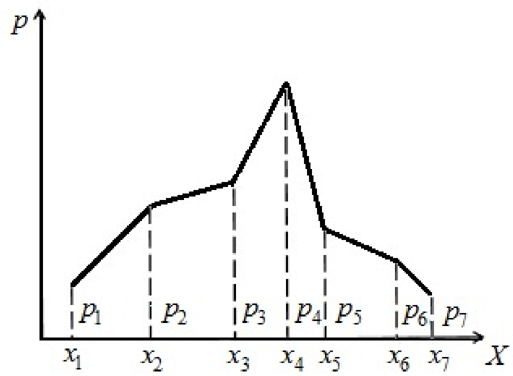
Закон Гаусса – распределение вероятностей непрерывной случайной величины X, если плотность вероятности определяется формулой

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Закон Пуассона – закон, моделирующий определение того, что в n независимых испытаниях событие осуществится m раз

$$P_n(m)\approx\frac{\mu^m}{m!}\mathrm{e}^{-\mu}.$$

Закон распределения дискретной случайной величины – соответствие между возможными значениями дискретной случайной величины и их вероятностями



Закон распределения случайной величины (дифференциальный) – функция $f(x)$, равная производной ее интегральной функции распределения: $f(x)=F'(x)$.

Измерения косвенные – измерения, при которых определяемую величину вычисляют по некоторой формуле, а параметры, входящие в эту формулу, находят путем прямых измерений.

Измерения прямые – измерения, которые производятся с помощью приборов, непосредственно измеряющих исследуемую величину.

Интеграл неопределенный – совокупность всех первообразных $F(x)+C$ для данной функции $f(x)\,dx$.

Интеграл определенный – конечный предел интегральной суммы, не зависящий от способа разбиения отрезка $[a,b]$ и выбора точек c_i

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=0}^{n-1} f(C_i)\Delta x_i .$$

Интегрирование – вычисление интеграла от данной функции.

Интегрирование непосредственное – нахождение интегралов функции, основанное на прямом применении свойств неопределённых интегралов и таблицы основных формул интегрирования.

Интегрирование подстановкой – переход от данной переменой интегрирования к другой переменной для упрощения подынтегрального выражения и приведение его к одному из табличных.

Интервал доверительный – интервал, в который с заданной вероятностью попадает истинное значение исследуемого признака.

Испытание – осуществление некоторого определенного комплекса условий, который может быть воспроизведен сколь угодно большое число раз.

Исход – каждый из возможных результатов испытания.

Класс точности (приведенная относительная погрешность) – выраженное в процентах отношение максимальной абсолютной погрешности Δx к наибольшему значению измеряемой величины $x_{\max}$ (предел измерения), которое можно определить данным прибором:

$$k = \frac{\Delta x \cdot 100}{x_{\max}}.$$

Компонента сезонная – компонента, отражаемая повторяемость изменения некоторых процессов в течение определенных периодов (года, месяца, недели, дня).

Компонента случайная – компонента, отражающая влияние различных неучтенных или случайных факторов.

Компонента циклическая – компонента, характеризующая колебания некоторого показателя относительно среднего или нулевого значения.

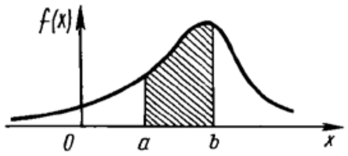
Корреляция множественная – корреляционная связь между величинами, число которых более двух.

Коэффициент – числовой множитель перед буквенными переменными в алгебраических выражениях.

Коэффициент линейной корреляции – количественная характеристика тесноты линейной корреляционной связи между двумя величинами *X* и *Y* в генеральной совокупности их пар значений:

$$r = \frac{M((X - M(X))(Y - M(Y)))}{\sigma_x \sigma_y}.$$

Кривая распределения – кривая $y = f(x)$, изображающая плотность распределения случайной величины



.

Критерий знаков – критерий для оценки различия в степени воздействия некоторого изменяющегося по величине фактора на изучаемые величины *X* и *Y*, законы распределения которых неизвестны, но предполагаются одинаковыми.

Критерий Кочрена – критерий для проверки нулевой гипотезы о равенстве генеральных дисперсий по выборкам одинакового объема в случае нескольких совокупностей.

Критерий непараметрический – критерий, который используется, если нет подчинения распределения выборки нормальному закону.

Критерий параметрический – критерий, который используется, если выборки взяты из генеральной совокупности, которая подчиняется известному, например, нормальному закону распределения.

Критерий статистический – это правило (формула), позволяющее по данным выборки принять либо отвергнуть нулевую гипотезу**.**

Линии регрессии – графики регрессий *Y* на *X* и *X* на *Y*.

Метод скользящего среднего – усреднение последовательности n значений и отнесение результата усреднения к середине интервала сглаживания, после чего интервал сдвигается на одно значение аргумента временного ряда направо.

Метод экспоненциального сглаживания – сглаживание временного ряда по взвешенному скользящему среднему, причем для сглаживаемого значения ряда весовой коэффициент максимален.

Методы описательной статистики – это методы описания выборок, исследуемых по количественному признаку *X*, с помощью различных числовых характеристик.

Многоугольник распределения – графическое представление закона распределения ломаной линией.

Мода – наиболее вероятное значение дискретной случайной величины.

Область значения функции – совокупность всех значений, принимаемой переменной *x*.

Область критическая – область, попадание в которую значения статистического критерия приводит к отклонению нулевой гипотезы.

Область определения функции – совокупность всех значений аргумента *x*, для которых функция $y = f(x)$ определена.

Область принятия нулевой гипотезы – совокупность значений критерия, при котором нулевую гипотезу принимают.

Объем выборочной совокупности – число объектов выборки.

Объем генеральной совокупности – число объектов генеральной совокупности.

Ожидание математическое случайной дискретной величины – сумма произведений всех возможных значений величины *X* на вероятности этих значений:

$$M(X) = \mu = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i .$$

Ожидание математическое случайной абсолютно непрерывной величины – величина определенного интеграла:

$$M(X) = \mu = \int_a^b x f(x)\, dx.$$

Отбор механический – отбор, при котором элементы генеральной совокупности выбираются по какой-либо закономерности.

Отбор серийный – отбор, при котором объекты отбирают из генеральной совокупности не по одному, а «сериями», которые подвергаются сплошному обследованию.

Отбор субъективный – отбор на основе какого-либо субъективного принципа.

Отбор типический – отбор, при котором объекты отбираются не из всей генеральной совокупности, а из каждой ее «типической» части.

Отклонение среднее квадратическое (стандартное отклонение) – корень квадратный из ее дисперсии:

$$\sigma = \sqrt{D(X)} = \sqrt{M((X - \mu)^2)}.$$

Оценка интервальная – определение некоторого интервала, в который с заданной вероятностью попадает истинное значение исследуемого признака.

Оценка несмещенная – оценка, математическое ожидание которой равно оцениваемому параметру при любом объеме выборки $M(\theta^*) = 0$.

Оценка смещенная – оценка, математическое ожидание которой не равно оцениваемому параметру.

Оценка точечная – оценка, которая определяется одним числом.

Ошибка второго рода – принимается нулевая гипотеза, когда она на самом деле не верна.

Ошибка первого рода – отвергается нулевая гипотеза, когда она на самом деле верна.

Первообразная функции – функция $F(x)$, заданная на некотором промежутке, для которой для всех x из этого промежутка $F'(x) = f(x)$ или $dF(x) = f(x)\,dx$.

Перестановка – всякое расположение элементов данного конечного множества, получающееся при некотором упорядочении этого множества.

Плотность вероятности абсолютно непрерывной случайной величины – функция $f(x)$, равная первой производной от интегральной функции распределения $f(x) = F'(x)$.

Плотность частоты (относительной частоты) – частота, которая приходится на единицу интервала.

Погрешности систематические – погрешности, которые при многократном измерении одной и той же величины остаются постоянными или изменяются по определенному закону.

Погрешности случайные – неопределенные по величине и природе погрешности измерений, обусловленные причинами, зависящими от измерительного устройства и внешних условий.

Погрешность абсолютная – разница между полученным результатом измерения и истинным (или более достоверным) значением определяемой величины: $\Delta x = x_{изм} - x_{ист}$.

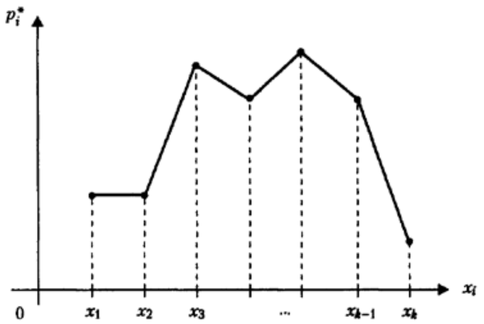
Погрешность относительная – отношение абсолютной погрешности Δx к точному значению определяемой величины:

$$\varepsilon = \frac{|x_{\text{изм}} - x_{\text{ист}}|}{x_{\text{ист}}}.$$

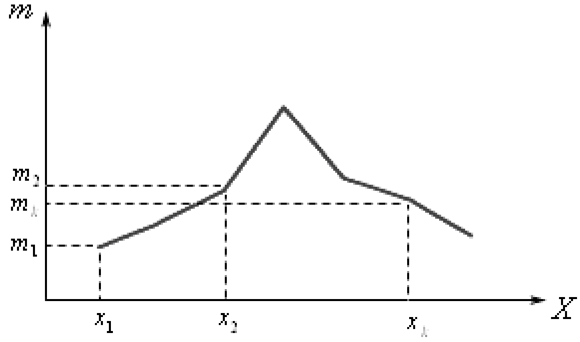
Показатели положения – показатели, описывающие положение вариант выборки на числовой оси (минимальная и максимальная варианты; выборочное среднее арифметическое значение).

Показатели разброса – показатели, описывающие степень разброса данных относительно своего центра (стандартное отклонение, выборочная дисперсия, размах выборки, коэффициент вариации).

Полигон относительных частот – ломаная линия, отрезки которой соединяют точки (x_1, p_1^*), (x_2, p_2^*), …, (x_k, p_k^*).



Полигон частот – ломаная линия, отрезки которой соединяют точки (x_1, m_1), (x_2, m_2), …, (x_k, m_k).



Принцип практической уверенности: если в некотором испытании вероятность случайного события A достаточно близка к единице, то можно быть практически уверенным в том, что при однократном испытании событие A произойдет. Если в некотором испытании вероятность случайного события A достаточно близка к нулю, то можно быть практически уверенным в том, что при однократном испытании событие A не произойдет.

Приращение аргумента – разность между двумя значениями аргумента $\Delta x = x - x_0$.

Приращение функции – разность между двумя значениями функции

$$\Delta y = \Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Приращение функции полное – приращение, которое получает функция $Z = f(x, y)$ при произвольных совместных изменениях ее обоих аргументов:

$$\Delta Z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Приращение функции частное – приращение, которое получает функция $Z = f(x, y)$, когда изменяется только одна из переменных:

$$\Delta_x Z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y),$$

$$\Delta Z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Произведение событий – событие, состоящее в совместном появлении всех событий.

Производная функции – предел отношения приращения функции в точке x_0 к приращению аргумента (Δx), когда последнее стремится к нулю:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}.$$

Разность событий – событие *C*, состоящее в том, что в результате испытания произошло событие *A* и одновременно не произошло событие *B*.

Распределение биномиальное – распределение вероятностей, определяемое формулой Бернулли $P_n(X) = C_n^X p^X q^{n-X}$

Распределение полимодальное – распределение при котором многоугольник распределения имеет более одного максимума

Распределение Пуассона – распределение вероятностей, определяемое законом Пуассона $P_n(X) \approx \frac{\mu^X}{X!} e^{-\mu}$, где $\mu = np$

Распределение равномерное – распределение вероятностей на интервале (a, b), которому принадлежат все возможные значения непрерывной случайной величины, плотность вероятности сохраняет постоянное значение, а вне этого отрезка равна нулю.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le a, \\ C & \text{при} \quad a < x \le b, \\ 0 & \text{при} \quad x > b \end{cases}$$

Распределение статистическое – составление дискретного или интервального рядов, соответственно, когда количественный признак, по которому исследуют данную выборку, является дискретной или непрерывной величиной.

Решение дифференциального уравнения – функция $y = f(x)$, которая, будучи подставлена в уравнение, превращает его в тождество.

Ряд вариационный – последовательность вариант, записанная в возрастающем порядке.

Ряд временной – множество результатов наблюдений изучаемого процесса, проводимых последовательно во времени.

Ряд временной детерминированный – временной ряд, значения которого в будущие моменты времени могут быть точно определены по известной функциональной зависимости.

Ряд временной интервальный – временной ряд, значений которого получены путем усреднения показателей за определенные промежутки времени.

Ряд временной моментный – временной ряд, значения которого определены в заданные моменты времени.

Ряд временной непрерывный – временной ряд, значения которого определены в любой произвольный момент времени.

Ряд временной случайный – временной ряд, значения которого могут быть описаны с помощью плотности распределения вероятностей.

Ряд простой статистический – значения, записанные для всех элементов выборки в том порядке, в котором они были получены в опытах.
Событие достоверное – событие, которое в данном опыте непременно произойдет.

Событие зависимое – событие, вероятность которого может меняется в зависимости от того, произошло другое событие или нет.

Событие невозможное – событие, которое при данном испытании не может произойти.

Событие независимое – событие A, вероятность которого не зависит от того, произошло событие B или нет.

Событие практически достоверное – событие, вероятность которого весьма близка к единице, но не равна единице.

Событие практически невозможное – событие, вероятность которого весьма близка к нулю, но не равна нулю.

Событие сложное – совмещение нескольких отдельных событий, которые называют простыми.

Событие случайное – всякий факт, который в результате опыта (испытания) может произойти или не произойти.

События несовместные – в результате опыта появление одного из событий, исключает появление остальных.

События равновозможные – при испытании не существует никаких объективных причин, вследствие которых одно из событий могло бы наступать чаще, чем другое.

Совокупность выборочная (выборка) – множество объектов, случайно отобранных из интересующей нас генеральной совокупности для конкретного статистического исследования.

Совокупность генеральная – это множество подлежащих статистическому изучению однородных объектов, которые характеризуются качественными или количественными признаками.

Среднее выборочное – среднее арифметическое значение признака выборочной совокупности:

$$\overline{x_в} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \qquad \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i m_i}{n}.$$

Сумма (объединение) двух событий – событие *C*, которое состоит или в осуществлении события *A*, или события *B*, или событий *A* и *B* вместе.

Теория ошибок – изучение и оценка погрешностей в измерениях.

Точность измерительного прибора – та наименьшая величина, которую можно вполне надежно определить с его помощью.

Тренд (долгосрочные изменения) – долгосрочные изменения, отражающие длительно протекающие процессы; временные рамки изменения этой составляющей измеряться столетиями или даже тысячелетиями.

Уравнение дифференциальное – уравнение, связывающее аргумент x, искомую функцию $f(x)$ и её производные $f'(x)$; $f''(x)$; $f'''(x)$; …; $f^{(n)}(x)$ или дифференциалы df; d^2f; d^3f; …; d^nf.

Уравнение дифференциальное в частных производных – дифференциальное уравнение в котором искомая функция зависит от нескольких аргументов.

Уравнение дифференциальное обыкновенное – дифференциальное уравнение в котором искомая функция зависит только от одного аргумента.

Уровень значимости $\boldsymbol{\alpha}$ – вероятность отклонения нулевой гипотезы, когда она на самом деле верна.

Уровни временного ряда – отдельные наблюдения временного ряд.

Фактор – различные, независимые, качественные показатели, влияющие на изучаемей признаки.

Фактор регулируемый – фактор контролируемый и измеряемый в процессе исследования.

Физический (механический) смысл производной – мгновенная скорость точки в данный момент времени равна значению производной от закона движения.

Функцией или **отображением** множества X в множество Y называют правило, по которому каждому элементу $x \in X$ ставится в соответствие определенный элемент $y \in Y$.

Функция возрастающая – если для любых значений аргументов $x_1, x_2 \in D(f)$ из неравенства $x_1 < x_2$ вытекает неравенство $f(x_1) < f(x_2)$.

Функция распределения – функция $F(x)$, равная вероятности $P(X < x)$ того, что случайная величина приняла значение, меньшее x:

$$F(x) = P(X < x)$$

Функция распределения эмпирическая – функция $F^*(x)$, определяющая для каждого значения x относительную частоту события $X < x$:

$$F^*(x) = \frac{m(x)}{n},$$

где $m(x)$ – число наблюдений, при которых значение признака X меньше x; n – объём выборки.

Функция сложная – функция $y = F(x)$, которая числу x ставит в соответствие число $f(g(x))$, образованное из функций f и g в указанном порядке: $y = f(g(x))$, где $y = f(u)$, $u = g(x)$.

Функция убывающая – если для любых значений аргументов $x_1, x_2 \in D(f)$ из неравенства $x_1 < x_2$ вытекает неравенство $f(x_1) > f(x_2)$.

Явление случайное – это явление, которое при неоднократном воспроизведении одного и того же опыта может протекать каждый раз несколько по-иному.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бейли, Н. Математика в биологии и медицине / Н. Бейли. – М.: Мир, 1970. – 326 с.
2. Боровков, А.А. Математическая статистика. Оценка параметров. Проверка гипотез /А. А.Боровков. – М.: Наука, 1984. – 442 с.
3. Вентцель, Е.С. Теория вероятностей / Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров. – М.: Наука,1977. – 576 с.
4. Гмурман, В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: учеб. пособие для вузов / В.Е. Гмурман. – М.: Высшая школа, 2003. – 405 с.
5. Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие для вузов / В.Е. Гмурман. – М.: Высшая школа, 2003. – 479 с.
6. Гнеденко, Б.В. Элементарное введение в теорию вероятности / Б.В. Гнеденко, И.Я. Хинчин. – М.: Наука, 1982. – 167 с.
7. Голёнова, И.А. Высшая математика: пособие для студентов фармацевтических факультетов / И.А. Голёнова, И.А. Орехова.– Витебск: ВГМУ, 2013. – 314 с.
8. Гроссман, С. Математика для биологов / С. Гроссман, Дж. Тернер. – М.: Высшая школа, 1983. – 383 с.
9. Звяровіч, Э. І. Элементы тэорыі імавернасцей: вучэб. дапаможнік / Э. І. Звяровіч, А.Я. Радына. – Мінск: Беларусь, 2013. – 206 с.
10. Инсарова, Н.И. Элементы теории вероятностей и математической статистики / Н.И. Инсарова, В.Г. Лещенко. – Минск: БГМУ, 2003. – 65с.
11. Лакин, Г.Ф. Биометрия: учеб. пособие / Г.Ф. Лакин. – 4-е изд. – М.: Высшая школа, 1990. –352 с.
12. Лобоцкая, Н.Л. Высшая математика / Н.Л. Лобоцкая, Ю.В. Морозов, А.А. Дунаев. – Минск: Вышэйшая школа, 1987. – 319с.
13. Медик, В.А. Математическая статистика в медицине / В.А. Медик, М.С. Токмачев. – М.: Финансы и статистика, 2007. – 798 с.
14. Омельченко, В.П. Практические занятия по высшей математике: учеб. пособие / В.П. Омельченко, Э.В. Курбатова. – Ростов н/Д: Феникс, 2006. – 350с.
15. Рокицкий, П.Ф. Биологическая статистика / П.Ф. Рокицкий. – 3-е изд. – Минск: Вышэйшая школа, 1973. – 320 с.
16. Федорова, В.Н. Краткий курс медицинской и биологической физики с элементами реабилитологии. Лекции и семинары: учебное пособие / В.Н. Федорова, Л.А. Степанова. – М.: ФИЗМАЛИТ, 2005. – 624с.

Учебное издание

ГОЛЁНОВА Ирина Александровна

ОСНОВЫ МЕДИЦИНСКОЙ СТАТИСТИКИ
С ЭЛЕМЕНТАМИ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Пособие
для студентов фармацевтического факультета

Редактор *И.А. Голёнова*
Технический редактор *И.А. Борисов*
Компьютерная верстка *И.А. Голёнова*
Корректор *И.А. Голёнова*

Подписано в печать _________. Формат бумаги 64х84 1/16. Бумага типографская №2.
Ризография. Усл. печ. л._____. Уч.-изд. л. _____.Тираж ___ экз. Заказ _____.

Издатель и полиграфическое исполнение:
УО «Витебский государственный медицинский университет»
ЛП № 02330/453 от 30.12.2013г.
Пр-т Фрунзе, 27, 210023, г. Витебск